Лекция № 11:

11.1 Площадь поверхности

Пусть $\mathbb{R}^k$ – евклидово пространство с ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_k$, вектора $\xi_i = \xi_i^1 e_1 + \dots + \xi_i^k e_k$, $i = \overline{1,k}$, линейно независимы. Из алгебры известно, что ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на вектора $\xi_1, \dots, \xi_k$, равен

$$V(\xi_1, \dots, \xi_k) = \det J, \quad \text{где } J := \begin{Vmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_k^1 & \dots & \xi_k^k \end{Vmatrix}.$$

Если реперы $e_1, \dots, e_n$ и $\xi_1, \dots, \xi_n$ лежат в одном классе ориентации $\mathbb{R}^k$, то величина $V(\xi_1, \dots, \xi_k) > 0$. В противном случае, $V(\xi_1, \dots, \xi_k) < 0$.

Напомним, что скалярное произведение $g_{ij} := \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \xi_i^1 \xi_j^1 + \dots + \xi_i^k \xi_j^k$, поэтому матрица Грама $G = (g_{ij})$ может быть представлена в виде $G = JJ^T$, а её определитель

$$\det G = \det(JJ^T) = \det J \det J^T = (\det J)^2.$$

Следовательно, неотрицательные значения объёма даются формулой

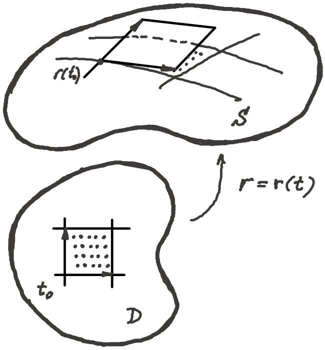
$$V(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sqrt{\det(\langle \xi_i, \xi_j \rangle)}$$

инвариантного вида, не зависящего от координат. Если думать, что векторы $\xi_1, \dots, \xi_k$ лежат в $\mathbb{R}^n$, $n \geq k$, то она будет давать величину k-мерного объёма или k-мерной площади k-мерного параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, натянутого на $\xi_1, \dots, \xi_k$.

Рассмотрим теперь k-мерную гладкую поверхность S в $\mathbb{R}^n$, заданную гладкой параметризацией

$r: D \to \mathbb{R}^n$

$r: t := (t^1, \dots t^k) \mapsto r(t) := (x^1(t), \dots, x^n(t))$,



где $D \subset \mathbb{R}^k$ – область. Пусть система координат $t = (t^1, \dots, t^k)$ порождена ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_k$ в $\mathbb{R}^k$. Для фиксированной точки $t_0 \in D$ выберем положительные h^i, $i = \overline{1,k}$, так, чтобы параллелепипед I, натянутый на векторы $h^1 e_1, \dots, h^k e_k \in T_{t_0} D$, целиком лежал в D.

Обозначим через I_S образ параллелепипеда I относительно r. Рассмотрим приращения

$$r(t_0 + h_i e_i) - r(t_0) = \frac{\partial r}{\partial t^i}(t_0) h^i + o(h^i).$$

При малых h^i эти приращения можно заменить на значение дифференциалов $\frac{\partial r}{\partial t^i}(t_0)h^i := \dot{r}_i h^i$. Значит криволинейный параллелепипед I_S можно приблизить параллелепипедом, натянутым на векторы $h^1\dot{r}_1, \dots, h^k\dot{r}_k$ из касательного пространства $T_{r(t_0)}S$ к поверхности S в точке $r(t_0)$. Объем ΔV криволинейного параллелепипеда I_S приближается объемом указанного параллелепипеда:

$$\Delta V \approx \sqrt{\det(\langle \dot{r}_i, \dot{r}_j \rangle)}\, h^1 \dots h^k = \sqrt{\det(g_{ij})}\, \Delta t^1 \dots \Delta t^k,$$

где $g_{ij} := \langle \dot{r}_i, \dot{r}_j \rangle$, $\Delta t^i = h^i$, $i = 1, \dots, k$.

Замостим теперь пространство $\mathbb{R}^k$, содержащее область D, k-мерными параллелепипедами, размер которых регулируется диаметром d, и выберем среди них те, которые лежат в D. Тогда сумма

$$\sum_{\alpha} \sqrt{\det(g_{ij})(t_\alpha)}\, \Delta t^1 \dots \Delta t^k$$

k-мерных объёмов их образов даёт приближённое значение k-мерного объёма или площади поверхности S, которое все более точно при $d \to 0$. Тем самым, мы принимаем определение.

Определение 11.1: Пусть k-мерная гладкая поверхность S задана параметризацией $r: D \to \mathbb{R}^n$. Её **площадью** (**k-мерным объёмом**) называется величина

$$V_k(S) := \int_D \sqrt{\det(\langle \dot{r}_i, \dot{r}_j \rangle)(t)}\, dt^1 \dots dt^k, \tag{11.1}$$

если она существует.

Можно показать, что площадь $V(S)$ не зависит от выбора СКК $t = (t^1, \dots, t^k)$.

При $k = 1$ выражение (11.1) даёт уже известную формулу длины дуги параметрически заданной кривой $r(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, где $t \in (\alpha; \beta)$

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\dot{x}^1)^2 + \dots + (\dot{x}^n)^2}\, dt.$$

Заметим, что в случае $k = n$ поверхность S является n-мерной областью в $\mathbb{R}^n$, диффеоморфной области $D \subset \mathbb{R}^n$. Матрица Якоби J отображения

$$t = (t^1, \dots, t^n) \mapsto r(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$$

является квадратной. Поэтому

$$V_n(S) = \int_D \sqrt{\det(\langle \dot{r}_i, \dot{r}_j \rangle)(t)}\, dt^1 \dots dt^k = \int_D |\det J|\, dt = \int_S dx^1 \dots dx^n = \mu(S)$$

есть мера Жордана области $S \subset \mathbb{R}^n$.

В случае $k=2$ и $n=3$ классическими являются обозначения

$$E := g_{11} = \langle \dot{r}_1, \dot{r}_1 \rangle, \quad F := g_{12} = g_{21} = \langle \dot{r}_1, \dot{r}_2 \rangle, \quad G := g_{22} = \langle \dot{r}_2, \dot{r}_2 \rangle,$$

при этом параметры t^1, t^2 обозначают u, v соответственно, а саму площадь $\sigma := V_2(S)$.
Формула (11.1) приобретает вид

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv.$$

Для графика функции $z = f(x,y)$, заданной в области $D \subset \mathbb{R}^2$, так как

$$r(x,y) = (x, y, f(x,y)),$$

то $\dot{r}_1 = (1, 0, f'_x)$ и $\dot{r}_2 = (0, 1, f'_y)$, а величины

$$E = 1 + (f'_x)^2, \quad F = f'_x \cdot f'_y, \quad G = 1 + (f'_y)^2.$$

Формула для площади графика имеет вид

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dx dy.$$

В общем случае мы принимаем

Определение 11.2: Пусть S — кусочно-гладкая k-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, которая после удаления из неё конечного или счётного числа кусочно гладких поверхностей размерности $\leq k-1$ распадается на конечное или счетное число гладких параметризуемых поверхностей $S_1, \ldots, S_m, \ldots$, то

$$V_k(S) := \sum_\alpha V_k(S_\alpha).$$