Лекция № 12:

12.1 Начальные сведения о дифференциальных формах

Напомним, что k-форма $L: \overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}^{k} \to \mathbb{R}$ называется **кососимметрической**, если

$$L(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_k) = -L(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_k)$$

для упорядоченных наборов $(\xi_1, \ldots, \xi_k)$ векторов из $\mathbb{R}^n$.

Пусть $L_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, — набор из k 1-форм на $\mathbb{R}^n$. Их внешнее произведение — это кососимметрическая k-форма

$$L_1 \wedge \ldots \wedge L_k (\xi_1, \ldots, \xi_k) \stackrel{def}{:=} \begin{vmatrix} L_1(\xi_1) & \ldots & L_k(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1(\xi_k) & \ldots & L_k(\xi_k) \end{vmatrix}, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^n, \; j = 1, \ldots, k.$$

Очевидно, что

1°. $L_1 \wedge L_2 = -L_2 \wedge L_1$.

2°. $(L_1 + L_2) \wedge L_3 = L_1 \wedge L_3 + L_2 \wedge L_3$.

Пример 12.1: Рассмотрим функцию $f: D \to \mathbb{R}$ дифференцируемую в т. $x_0 \in D$. Её дифференциал в этой точке

$$df(x_0): T_{x_0} D \to \mathbb{R},$$

$$df(x_0)(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)\xi^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)\xi^n, \quad \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in T_{x_0} D \simeq \mathbb{R}^n,$$

является 1-формой. Поэтому для набора функций $f_1, \ldots, f_k$ дифференцируемых в т. $x_0 \in D$ мы можем рассмотреть

$$df_1 \wedge \ldots \wedge df_k (\xi_1, \ldots, \xi_k) = \begin{vmatrix} df_1(\xi_1) & \ldots & df_k(\xi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ df_1(\xi_k) & \ldots & df_k(\xi_k) \end{vmatrix}.$$

Пример 12.2: Пусть $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ — область. Тогда её дифференциал $df(x)$ определён в каждой точке $x \in D$, т.е. в каждой точке $x \in D$ задана 1-форма (линейная функция) $df(x) \cdot T_x D \to T_{f(x)} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ на касательном пространстве $T_x D$.

Определение 12.1: **Дифференциальной формой** ω **степени** p в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется определённая в каждой точке $x \in D$ кососимметрическая форма

$$\omega(x): \underbrace{T_x D \times \ldots \times T_x D}_{p \text{ раз}} \to \mathbb{R}.$$

Пример 12.2: Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле $x \mapsto F(x) \in T_x D$. Если ξ – вектор, приложенный к т. $x \in D$ (т.е. $\xi \in T_x D$), то

$$\omega^1_F(x)(\xi) := \langle F(x), \xi \rangle$$

является дифференциальной формой степени 1. Если F – поле сил в D, то ω^1_F называется формой работы поля F.

Пример 12.3: Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле $x \mapsto V(x)$. Рассмотрим для точки $x \in D$ и набора векторов $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in T_x D$ определитель

$$\begin{vmatrix} V^1(x) & \dots & V^n(x) \\ \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1}^1 & \dots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix},$$

выражающий ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на $V(x), \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$. Он является кососимметрической $(n-1)$-формой по переменным $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, поэтому задаёт дифференциальную форму ω^{n-1}_V степени $n-1$, которая называется формой потока векторного поля V в области D.

12.2 Координатная запись дифференциальной формы

Пусть L – кососимметрическая 2-форма в $\mathbb{R}^3$, e_1, e_2, e_3 – базис в $\mathbb{R}^3$. Для векторов

$$\xi_1 = \xi_1^1 e_1 + \xi_1^2 e_2 + \xi_1^3 e_3, \quad \xi_2 = \xi_2^1 e_1 + \xi_2^2 e_2 + \xi_2^3 e_3$$

значение формы

$$L(\xi_1, \xi_2) = L(\xi_1^1 e_1 + \xi_1^2 e_2 + \xi_1^3 e_3, \xi_2^1 e_1 + \xi_2^2 e_2 + \xi_2^3 e_3) =$$

$$= L(e_1, e_2)\xi_1^1\xi_2^2 + L(e_1, e_3)\xi_1^1\xi_2^3 + L(e_2, e_1)\xi_1^2\xi_2^1 + L(e_2, e_3)\xi_1^2\xi_2^3$$

$$+ L(e_3, e_1)\xi_1^3\xi_2^1 + L(e_3, e_2)\xi_1^3\xi_2^2 = L(e_1, e_2)(\xi_1^1\xi_2^2 - \xi_1^2\xi_2^1) +$$

$$+ L(e_1, e_3)(\xi_1^1\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^1) + L(e_2, e_3)(\xi_1^2\xi_2^3 - \xi_1^3\xi_2^2) =$$

$$= \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 3} L(e_{i_1}, e_{i_2}) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix}.$$

В общем случае

$$L(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \dots & \xi_1^{i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_k^{i_1} & \dots & \xi_k^{i_k} \end{vmatrix}.$$

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная k-форма ω и криволинейная система координат $x^1, \dots, x^n$. В каждой точке $x \in D$ фиксирован базис $e_1(x), \dots, e_n(x)$ пространства $T_x D$. Тогда

$$\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} a_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(\xi_1, \dots, \xi_k),$$

где коэффициент $a_{i_1 \dots i_k}(x) := \omega(e_{i_1}(x), \dots, e_{i_k}(x))$.

Пример 12.4: 1) $df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\, dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) dx^n.$

2) $\langle F, \xi \rangle = \langle F^{i_1}(x) e_{i_1}(x), \xi^{i_2} e_{i_2}(x) \rangle = \langle e_{i_1}(x), e_{i_2}(x) \rangle F^{i_1}(x) \xi^{i_2} =$

$$= g_{i_1 i_2}(x) F^{i_1}(x) \xi^{i_2} = g_{i_1 i_2}(x) F^{i_1}(x) dx^{i_2}(\xi).$$

Таким образом, $\omega^1_F(x) = \langle F(x), \cdot \rangle = (g_{i_1 i}(x) F^{i_1}(x)) dx^i = a_i(x) dx^i$, а в декартовых координатах

$$\omega^1_F(x) = \sum_{i=1}^n F^i(x)\, dx^i.$$

3) Аналогично в декартовых координатах форма потока

$$\omega^2_V(x) = V^1(x)\, dx^2 \wedge dx^3 + V^2(x)\, dx^3 \wedge dx^1 + V^3(x) dx^1 \wedge dx^2.$$

12.3 Внешний дифференциал формы

Будем считать функцию $f: D \to \mathbb{R}$, определенную в области $D \subset \mathbb{R}^n$, дифференциальной формой нулевой степени на D.

Определение 12.2: **Дифференциалом** 0-формы f будем называть обычный дифференциал df функции f.

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана такая дифференциальная p-форма

$$\omega(x) = a_{i_1 \dots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

что её коэффициенты являются дифференцируемыми функциями. Тогда **дифференциалом формы** ω называется $(p+1)$-форма

$$d\omega(x) = da_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

Операция $d: \Omega^p \to \Omega^{p+1}$, где $\Omega^p = \Omega^p(D)$ — совокупность всех форм степени $p \geq 0$ с коэффициентами $C^{(\infty)}(D; \mathbb{R})$.

Пример 12.5: 1) Пусть $\omega = f(x,y,z)$ — форма степени 0, где f — дифференцируемая функция в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Тогда

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

2) Пусть $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ — дифференциальная форма степени 1 в области $D \subset \mathbb{R}^3$. Если P, Q — дифференцируемые в D функции, то

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

3) Пусть $\omega = P dy\wedge dz + Q dz\wedge dx + R dx\wedge dy$. Тогда $d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.$

4) Пусть (x^1, x^2, x^3) — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$ — область, в которой определены скалярное поле $x \mapsto f(x)$ и векторные поля $x \mapsto F = (F^1(x), F^2(x), F^3(x))$, $x \mapsto V = (V^1(x), V^2(x), V^3(x))$. Тогда в D определены векторные поля

$$\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \quad (\text{градиент скалярного поля } f)$$

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3}, \frac{\partial F^1}{\partial x^3} - \frac{\partial F^3}{\partial x^1}, \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2}\right) \quad (\text{ротор векторного поля } F)$$

и скалярное поле

$$\operatorname{div} V := \frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3} \quad (\text{дивергенция векторного поля } V)$$

Поскольку в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ имеются взаимооднозначные соответствия

$$F \xrightarrow{1:1} \omega_F^1 = \langle F, \cdot \rangle, \quad V \xrightarrow{1:1} \omega_V^2 = (V, \cdot, \cdot), \quad \rho \xrightarrow{1:1} \rho(x^1, x^2, x^3)\, dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3,$$

мы можем определить названные операторы в инвариантной форме

$$f = \omega^0 \longmapsto d\omega^0 = \omega_g^1 \longmapsto g := \operatorname{grad} f,$$

$$F \mapsto \omega_F^1 \longmapsto d\omega_F^1 = \omega_r^2 \longmapsto r := \operatorname{rot} F,$$

$$V \mapsto \omega_V^2 \longmapsto d\omega_V^2 = \omega_\rho^3 \longmapsto \rho := \operatorname{div} V.$$