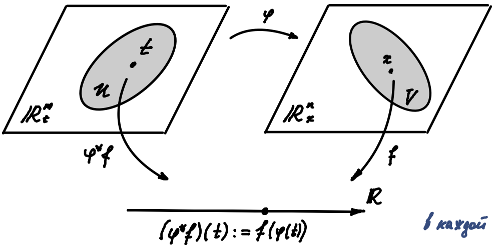
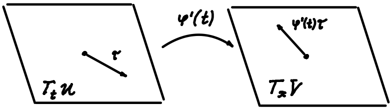
Лекция № 13:

13.1 Перенос форм при отображениях





Пусть $U\subset\mathbb{R}^m$ и $V\subset\mathbb{R}^n$ — области. Любое отображение $\varphi: U\to V$ естественно определяет отображение $\varphi^*:\Omega^0(V)\to\Omega^0(U)$, которое функции $f: V\to\mathbb{R}$ сопоставляет функцию $\varphi^*f: U\to\mathbb{R}$, $(\varphi^*f)(t):=(f\circ\varphi)(t)$. Для гладкого отображения $\varphi: U\to V$ в каждой $t\in U$ определено касательное отображение

$$\varphi'(t):\ T_tU\to T_xV,$$

где $x=\varphi(t)$. В этом случае p-форме ω в области V можно сопоставить p-форму в области U:

$$\varphi^*\omega(t)(\tau_1,\dots,\tau_p):=\omega(\varphi(t))(\varphi'(t)\tau_1,\dots,\varphi'(t)\tau_p),$$

где $\tau_1,\dots,\tau_p\in T_tU$. Следовательно, гладкое отображение $\varphi: U\to V$ определяет отображение $\varphi^*:\Omega^p(V)\to\Omega^p(U)$, переносящее заданные на V формы в область U.

Свойства φ^*:

1°. $\varphi^*(\omega'+\omega'')=\varphi^*(\omega')+\varphi^*(\omega'')$.

2°. $\varphi^*(\lambda\omega)=\lambda\,\varphi^*\omega$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3°. $(\psi\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\psi^*$

Пример 13.1: Рассмотрим в области $V\subset\mathbb{R}^n_x$ 2-форму $\omega=dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}$, гладкое отображение $\varphi: U\to V$ с компонентами $x^i=x^i(t^1,\dots,t^m)$, где $t\in U\subset\mathbb{R}^m_t$. Пусть $\tau_1,\tau_2\in T_tU$, векторы $\xi_i:=\varphi'(t)\tau_i$, $i=1,2$, лежат в касательном пространстве $T_{\varphi(t)}V$. Напомним, что

$$\xi_1^i:=\frac{\partial x^i}{\partial t^1}(t)\,\tau_1^1+\dots+\frac{\partial x^i}{\partial t^m}\tau_1^m=\frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\,\tau_1^j,$$

$$\xi_2^i:=\frac{\partial x^i}{\partial t^1}(t)\,\tau_2^1+\dots+\frac{\partial x^i}{\partial t^m}\tau_2^m=\frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t)\,\tau_2^j,$$

где $i=1,\dots,n$, а суммирование по $j=1,\dots,m$.

Тогда $\varphi^*\omega(t)(\tau_1,\tau_2)=\omega(\varphi(t))(\xi_1,\xi_2)=dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}(\xi_1,\xi_2)=$

$$(13.1)\qquad =\begin{vmatrix}\xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2}\\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_1^{j_1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau_1^{j_2}\\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\tau_2^{j_1} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\tau_2^{j_2}\end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\begin{vmatrix}\tau_1^{j_1} & \tau_1^{j_2}\\ \tau_2^{j_1} & \tau_2^{j_2}\end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\,dt^{j_1}\wedge dt^{j_2}(\tau_1,\tau_2)$$

$$=\sum_{1\le j_1<j_2\le m}\left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}-\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}}\frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}}\right)dt^{j_1}\wedge dt^{j_2}(\tau_1,\tau_2)=\sum_{1\le j_1<j_2\le m}\underbrace{\begin{vmatrix}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_1}}\\ \frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_2}} & \frac{\partial x^{i_2}}{\partial t^{j_2}}\end{vmatrix}}_{\frac{\partial(x^{i_1},x^{i_2})}{\partial(t^{j_1},t^{j_2})}(t)}(t)\,dt^{j_1}\wedge dt^{j_2}(\tau_1,\tau_2).$$

Таким образом,

$$\varphi^*(dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}) = \sum_{1\le j_1\le j_2\le m} \frac{\partial(x^{i_1},x^{i_2})}{\partial(t^{j_1},t^{j_2})}(t)\, dt^{j_1}\wedge dt^{j_2}.$$

◀

Для произвольной форм степени p имеем равенство

$$\varphi^*\Big(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} a_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\Big) = \sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_p\le n\\ 1\le j_1<\ldots<j_p\le m}} a_{i_1,\ldots,i_p}(x(t))\,\frac{\partial(x^{i_1},\ldots,x^{i_p})}{\partial(t^{j_1},\ldots,t^{j_p})}\, dt^{j_1}\wedge\ldots\wedge dt^{j_p}.$$

Утверждение 13.1: Пусть в области $V\subset\mathbb{R}^n$ задана дифференциальная форма ω, а $\varphi: \mathcal{U}\to V$ – гладкое отображение области $\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^m$ в V. Тогда координатная запись формы $\varphi^*\omega$ может быть получена из координатной записи

$$\sum_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n} a_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$$

формы ω заменой $x=\varphi(t)$ (с последующим преобразованием в соответствии со свойствами внешнего произведения).

13.2 Формы на поверхностях

Определение 13.1: Пусть $S\subset\mathbb{R}^n$ – гладкая поверхность. Тогда дифференциальной формой ω степени p на S называется определённая в каждой точке $x\in S$ кососимметрическая p-форма $\omega(x): T_xS\times\ldots\times T_xS\to\mathbb{R}$.

Пример 13.2: Пусть гладкая поверхность S лежит в области $D\subset\mathbb{R}^n$, а ω – дифференциальная форма в области D, т.е. в каждой т. $x\in D$ задана

$\omega(x): T_xD\times\ldots\times T_xD\to\mathbb{R}$

Каждый касательный вектор $\xi\in T_xS$ естественно лежит и в T_xD, т.е. $T_xS\subset T_xD$. Тогда мы ограничить форму $\omega(x)$ только на наборы векторов $\xi_1,\ldots,\xi_p$ из T_xS:

$$\omega|_S(x)(\xi_1,\ldots,\xi_p) := \omega(x)(\xi_1,\ldots,\xi_p).$$

Тем самым на S определена дифференциальная форма $\omega|_S$, называемая ограничением формы ω на S).

Например, рассмотрим форму потока $\omega^2_V(x) = V^1(x)\,dx^2\wedge dx^3 + V^2(x)\,dx^3\wedge dx^1 + V^3(x)\,dx^1\wedge dx^2$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами (x^1,x^2,x^3). Пусть S – двумерная поверхность, заданная параметризацией φ

$x^1=x^1(t^1,t^2),\quad x^2=x^2(t^1,t^2),\quad x^3=x^3(t^1,t^2),$

где $(t^1,t^2)\in I\subset\mathbb{R}^2$. Касательный вектор $\xi\in T_{x(t)}S$ имеет координаты

$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^1}(t)\tau^1 + \frac{\partial x^i}{\partial t^2}(t)\tau^2,\quad$ где $(\tau_1,\tau_2)\in T_tI$

Но тогда согласно (13.1)

$$\omega^2_V|_S(x)(\xi_1,\xi_2) := V^1(\varphi(t))\begin{vmatrix}\xi_1^2 & \xi_1^3\\ \xi_2^2 & \xi_2^3\end{vmatrix} + V^2(\varphi(t))\begin{vmatrix}\xi_1^3 & \xi_1^1\\ \xi_2^3 & \xi_2^1\end{vmatrix} + V^3(\varphi(t))\begin{vmatrix}\xi_1^2 & \xi_1^1\\ \xi_2^2 & \xi_2^1\end{vmatrix} \overset{(13.1)}{=}$$

$$= \left(V^1(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^3}{\partial t^1}\\ \frac{\partial x^2}{\partial t^2} & \frac{\partial x^3}{\partial t^2}\end{vmatrix} + V^2(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^3}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^1}\\ \frac{\partial x^3}{\partial t^2} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix} + V^3(\varphi(t))\begin{vmatrix}\frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^1}\\ \frac{\partial x^2}{\partial t^2} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2}\end{vmatrix}\right) dt^1\wedge dt^2(\tau^1,\tau^2) =$$

$$= \varphi^*(\omega^2_V)(t)(\tau_1,\tau_2). \qquad \blacktriangleleft$$

13.3 Интеграл от дифференциальной формы

Определение 13.2:

1) Пусть в области $D\subset\mathbb{R}^k$ задана дифференциальная форма $f(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k$. Тогда

$$\int_D f(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k \overset{def}{:=} \int_D f(x)\,dx^1\ldots dx^k$$

2) Пусть $S\subset\mathbb{R}^n$ — гладкая k-мерная ориентированная поверхность, $\varphi: D\to S$ — её параметризация, а ω — дифференциальная k-форма на S. Тогда

$$\int_S \omega := \pm\int_D \varphi^*\omega,$$

где знак $+$ берётся в случае, когда φ согласуется с заданной ориентацией S, а знак $-$ в противоположном случае.

3) Пусть S — кусочно гладкая ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^n$, ω — дифференциальная k-форма, определённая в точках, где S имеет касательную плоскость. Тогда

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i}\omega,$$

где $S_1,\ldots,S_i,\ldots$ — разбиение S на гладкие k-мерные параметризуемые поверхности, пересекающиеся лишь по кусочно гладким поверхностям меньшей размерности