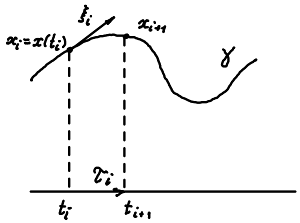
Лекция № 14:

14.1 Работа векторного поля

Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^n$ задано непрерывное векторное поле $F(x)$, в области G перемещается по гладкой кривой $\gamma: I \to \gamma(I) \subset G$ частица.
(Напомним, что в постоянном поле F перемещение на вектор ξ связано с работой, равной $\langle F, \xi \rangle$).



Если γ задана гладкой параметризацией $x = x(t)$, где $t \in [a; b]$, то, выбрав достаточно мелкое разбиение отрезка на $I_i := \{ t \in [a;b] : t_i \le t \le t_{i+1} \}$, получим, что на I_i

$$x(t) - x(t_i) \approx \dot{x}(t_i)(t - t_i)$$

(с точностью до бесконечно малых более высокого порядка). Тогда вектору $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ соответствует перемещение из точки $x_i := x(t_i)$ на вектор $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$, при этом $\Delta x_i \approx \xi_i := \dot{x}(t_i)\tau_i$, где $\xi_i \in T_{x_i}\gamma$.

Таким образом, т.к F непрерывно, то работу ΔA_i, связанную с перемещением частицы за промежуток времени I_i, можно записать в виде

$$\Delta A_i \approx \langle F(x_i), \xi_i \rangle \quad \text{или} \quad \Delta A_i \approx \langle F(x(t_i)), \dot{x}(t_i) \rangle \Delta t_i$$

Но тогда $\Delta A \approx \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i \langle F(x(t_i)), \dot{x}(t_i) \rangle \Delta t_i$. Устремляя параметр разбиения отрезка $[a; b]$ к нулю получим, что

$$A = \int_a^b \langle F(x(t)), \dot{x}(t) \rangle dt =: \int_\gamma \overbrace{F^1 dx^1 + \ldots + F^n dx^n}^{\omega_F^1}.$$

Следовательно, интеграл по кривой γ от дифференциальной формы $\omega_F^1 = \langle F(x), dx \rangle$ выражает работу:

$$\boxed{A = \int_\gamma \omega_F^1}.$$

Если кривая γ замкнута (т.е. $\gamma(a) = \gamma(b)$), то работу поля F вдоль γ называют **циркуляцией поля вдоль γ**. Интеграл по замкнутой кривой (контуру) обычно обозначают через $\oint_\gamma \omega$.

Пример 14.1: Рассмотрим в $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ центральное поле $F = f(r)(x, y, z)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — расстояние от начала координат до точки (x,y,z). Найдём работу этого поля вдоль $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $\gamma(0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\gamma(1) = (x_1, y_1, z_1)$:

$$\int_\gamma f(r)\,(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \frac{1}{2} \int_\gamma f(r)\, d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(r(t))\, dr^2(t) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 f(\sqrt{u(t)})\, du(t) = \frac{1}{2} \int_{r_0^2}^{r_1^2} f(\sqrt{u})\, du = \Phi(r_0, r_1),$$

где $r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)$, $r_0 = r(0)$, $r_1 = r(1)$.

Работа зависит только от расстояний r_0, r_1.

Для гравитационного поля $\frac{1}{r^3}(x,y,z)$ единичной точечной массы, помещённой в начало координат

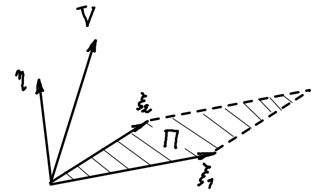
$$\Phi(r_0,r_1)=\frac{1}{2}\int\limits_{r_0^2}^{r_1^2}\frac{du}{u^{3/2}}=\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_1}.$$

14.2 Поток векторного поля через поверхность.

Пусть $G\subset\mathbb{R}^3$ — область, V — поле скоростей установившегося течения жидкости в области G, $S\subset\mathbb{R}^3$ — гладкая ориентированная поверхность. Будем решать задачу о нахождении потока $\mathcal{F}$ жидкости через поверхность S, т.е. объёма жидкости, протекающего через S в единицу времени в указанную ориентирующим полем нормалей сторону этой поверхности.

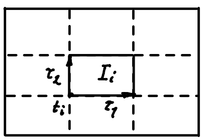
Для постоянного поля скоростей V поток через параллелограмм Π, натянутый на пару векторов ξ_1,ξ_2, равен объему параллелепипеда, построенному на векторах V,ξ_1,ξ_2.
Если η — нормаль к Π, а поток $\mathcal{F}$ ищется в сторону, указываемую этой нормалью, то

$$\mathcal{F}=(V,\xi_1,\xi_2)=\begin{vmatrix} V^1 & V^2 & V^3\\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3\\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3\end{vmatrix}$$

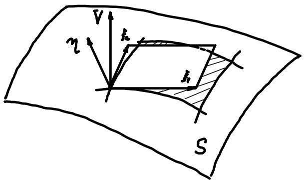


в случае, когда η и репер ξ_1,ξ_2 задают одинаковую ориентацию Π. В противном случае $\mathcal{F}=-(V,\xi_1,\xi_2)$.

Вернёмся к основному случаю. Пусть поверхность S задаётся гладкой параметризацией $\varphi: I\to S\subset G$, где I — двумерный промежуток, лежащий в плоскости $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим разбиение P промежутка I на маленькие промежутки I_i



$$\xrightarrow{\ \varphi\ }\qquad \underbrace{\xi_i=\varphi'(t_i)\tau_i,\ i=1,2.}_{(*)}$$



Образ $\varphi(I_i)$ аппроксимируется параллелограмм, натянутый на векторы ξ_1,ξ_2, являющиеся образами касательных векторов $\tau_1,\tau_2\in T_{t_i}I_i$ (т.е. выполняется соотношение (*)). Тогда поток через $\varphi(I_i)$ приближённо равен

$$\Delta\mathcal{F}_i\approx(V(x_i),\xi_1,\xi_2),$$

если считать, что $V(x)$ изменяется незначительно в пределах $\varphi(I_i)$, и что репер ξ_1,ξ_2 задаёт ту же ориентацию и нормаль η.

Значит суммарный поток через S

$$\mathcal{F} = \sum_i \Delta \mathcal{F}_i \approx \sum_i \omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2)$$

или

$$\mathcal{F} \approx \sum_i \omega_V^2(\varphi(t_i))(\varphi'(t_i)\tau_1, \varphi'(t_i)\tau_2) = \sum_i \varphi^*(\omega_V^2)(t_i)(\tau_1, \tau_2)$$

где ω_V^2 – дифференциальная форма потока векторного поля V.
Переходя в последнем равенстве к пределу по параметру $\lambda(P) \to 0$, получим

$$\mathcal{F} = \iint_I \varphi^*(\omega_V^2) = \int_I \varphi^*(\omega_V^2)$$ (где первый интеграл – это интеграл Римана по промежутку I).

Но тогда мы приходим к соотношению

$$\mathcal{F} = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sum_i \omega_V^2(x_i)(\xi_1, \xi_2) = \int_S \omega_V^2.$$

Таким образом, интеграл от формы потока по ориентированной поверхности S выражает поток через V:

$$\boxed{\mathcal{F} = \int_S \omega_V^2}.$$

Для практических вычислений удобно использовать формулы

$$\mathcal{F} = \int_I \left(V^1(\varphi(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^3}{\partial t^1} \\ \frac{\partial x^2}{\partial t^2} & \frac{\partial x^3}{\partial t^2} \end{vmatrix} + V^2(\varphi(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x^3}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^1} \\ \frac{\partial x^3}{\partial t^2} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2} \end{vmatrix} + V^3(\varphi(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial t^1} & \frac{\partial x^1}{\partial t^1} \\ \frac{\partial x^2}{\partial t^2} & \frac{\partial x^1}{\partial t^2} \end{vmatrix} \right) dt^1 \wedge dt^2,$$

$$\mathcal{F} = \int_I \begin{vmatrix} V^1(\varphi(t)) & V^2(\varphi(t)) & V^3(\varphi(t)) \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^1}(t) & \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^1}(t) & \frac{\partial \varphi^3}{\partial t^1}(t) \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial t^2}(t) & \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2}(t) & \frac{\partial \varphi^3}{\partial t^2}(t) \end{vmatrix} dt^1 dt^2;$$

в последней формуле карта $x = \varphi(t)$ должна задавать ту же ориентацию поверхности S, что и ориентирующее её семейство нормалей.
В противном случае поток $\mathcal{F}$ будет отличаться от значения интеграла знаком.