Лекция 2: Несобственные интегралы, зависящие от параметров

(2.1) Равномерная сходимость несобственного интеграла по параметру

Рассмотрим несобственный интеграл $F(y) = \int_a^{\omega} f(x,y)\,dx$, который сходится при всяком $y \in Y$, с единственной особенностью ω (либо в окр-ти ω функция $f(x,y)$ неограничена, либо $\omega = +\infty$).

Определение 2.1: Несобственный интеграл $F(y) = \int_a^{\omega} f(x,y)\,dx$ с параметром $y \in Y$ сходится равномерно на $E \subset Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ окрестность $\mathcal{U}(\omega)$ во множестве $[a;\omega)$ такая, что $\forall b \in \mathcal{U}(\omega)$ и $\forall y \in E$ выполняется

$$\left| \int_b^{\omega} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Если $\omega \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{U}(\omega) = (\omega - \delta; \omega)$. При этом $\mathcal{U}(+\infty) = (\delta; +\infty)$.

Рассмотрим семейство функций $F_b(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx$, $b \in [a;\omega)$. Тогда интеграл $\int_a f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $E \Leftrightarrow F_b(y) \rightrightarrows F(y)$ на E при $b \to \omega$, $b \in [a;\omega)$.

Пример 2.1: 1) Рассмотрим $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dy$, где $\alpha, \beta > 0$ фиксированы.
Оценим остаток при $x \in [0;+\infty)$

$$0 \le \int_b^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dy = \int_b^{+\infty} (xy)^{\alpha} e^{-xy} \cdot y^{\beta+1} e^{-y}\,dy \le M_{\alpha} \int_b y^{\beta+1} e^{-y}\,dy,$$

где $M_{\alpha} = \max\limits_{[0;+\infty)} u^{\alpha} e^{-u}$. Интеграл $\int y^{\beta+1} e^{-y}\,dy$ сходится, поэтому его остаток $\int_b^{+\infty} y^{\beta+1} e^{-y}\,dy$ может быть сделан сколь угодно малым за счёт выбора b достаточно большим. Поэтому $\Phi(x)$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$

2) Рассмотрим $F(y) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dx$, $y \in [0;+\infty)$. Оценим

$$0 \le \int_b^{+\infty} x^{\alpha} y^{\alpha+\beta+1} e^{-(1+x)y}\,dx = y^{\beta} e^{-y} \int_b^{+\infty} (xy)^{\alpha} e^{-xy}\,dx = y^{\beta} e^{-y} \int_{by}^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u}\,du.$$

Заметим, что

$$\int_{by}^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u}\,du \le \int_0^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u}\,du < +\infty \quad \text{при } y \ge 0, \quad y^{\beta} e^{-y} \xrightarrow[y \to 0]{} 0.$$

Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $y_0 > 0$ такое, что при $y \in [0; y_0]$ остаток $F_b(y) < \varepsilon$ при любом $b \in [0;+\infty)$.

Пусть $y \ge y_0 > 0$. Тогда

$$0 \le \int_{by}^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u}\,du \le \int_{by_0}^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u}\,du \xrightarrow[b \to +\infty]{} 0.$$

Заметив, что $M_{\beta} = \max\limits_{[0;+\infty)} y^{\beta} e^{-y} < +\infty$, получим, что при достаточно больших b и всех $y \in [y_0; +\infty)$ остаток $F_b(y)$ можно сделать $< \varepsilon$.

Объединив $[0; y_0]$, $[y_0; +\infty)$, получим, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B > 0$, т.ч. $\forall b > B$ $F_b(y) < \varepsilon$.
Таким образом, интеграл $F(y)$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$.

2.2 Критерий Коши равномерной сходимости интеграла

ТЕОРЕМА 2.1: (критерий Коши) Интеграл $F(y)=\int\limits_a^\omega f(x,y)dx$, $y\in Y$, сходится равномерно на $E\subset Y$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ окрестность $\mathcal{U}(\omega)$ во множестве $[a;\omega)$ такая, что $\forall b_1,b_2\in\mathcal{U}(\omega)$ и $\forall y\in E$ выполняется

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Это просто переформулировка критерия Коши равномерной сходимости семейства функций. ◀

СЛЕДСТВИЕ: Пусть в интеграле $F(y)=\int\limits_a^\omega f(x,y)dx$ функция f непрерывна на $[a;\omega)\times[c;d]$, интеграл сходится при каждом $y\in(c;d)$ и расходится при $y=c$ или $y=d$. Тогда он сходится неравномерно не только на $(c;d)$, но и на любом множестве, замыкание которого содержит точку расходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для определённости считаем, что интеграл расходится при $y=c$. Тогда согласно критерию Коши сходимости несобственного интеграла найдётся $\varepsilon_0>0$ такое, что в любой окрестности $\mathcal{U}(\omega)\subset[a;\omega)$ найдутся b_1,b_2 со свойством $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,c)\,dx\right|>\varepsilon_0$.

По теореме 1.1 собственный интеграл $\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx$ является непрерывной функцией на $[c;d]$. Поэтому в некоторой окрестности т. c будет выполняться неравенство

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right|>\varepsilon_0.$$

То есть $\exists\varepsilon_0>0$ $\forall\,\mathcal{U}(\omega)$ $\exists b_1,b_2\in\mathcal{U}(\omega)$ и $\exists y$ из подмножества $E\subset(c;d)$, замыкание которого содержит точку c, т.ч.

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx\right|>\varepsilon_0,$$ выполнено отрицание условия теоремы 2.1. ◀

ПРИМЕР 2.2: Рассмотрим $\int\limits^{+\infty} e^{-tx^2}dx$. Он сходится при $t>0$, и, очевидно, расходится при $t=0$. Поэтому по следствию он сходится неравномерно на $(0;+\infty)$.

Заметим, что при $t\geq t_0>0$

$$0<\int\limits_b^{+\infty} e^{-tx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int\limits_{b\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-u^2}du\leq\frac{1}{\sqrt{t_0}}\int\limits_{b\sqrt{t_0}}^{+\infty} e^{-u^2}du\xrightarrow[b\to\omega]{}0$$

Поэтому интеграл сходится равномерно на $[t_0;+\infty)$.

2.3 Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов с параметрами

ТЕОРЕМА 2.2: (признак Вейерштрасса) Пусть $\int_a^\omega f(x,y)dx$, $\int_a^\omega g(x,y)dx$ — несобственные интегралы с параметром $y \in Y$. Тогда, если при любом $y \in Y$ и любом $x \in [a;\omega)$ выполняется $|f(x,y)| \leq g(x,y)$, и интеграл $\int_a^\omega g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится при каждом $y \in Y$ абсолютно и равномерно на Y.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Вытекает из оценок

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x,y)|\,dx \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x,y)\,dx$$

и критерия Коши (теорема 2.1) ◀

ПРИМЕР 2.3: 1) Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1+x^2}dx$. В силу неравенства

$$\left| \frac{\sin \alpha x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2},$$

справедливого для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$, и сходимости $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, по признаку Вейерштрасса вытекает равномерная сходимость на $\mathbb{R}$ исходного интеграла.

2) Интеграл $\int_0^{\infty} \sin x\, e^{-tx^2}dx$ сходится равномерно при $t \geq t_0 > 0$, т.к. $|\sin x\, e^{-tx^2}| \leq e^{-tx^2}$, а $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx$ сходится равномерно при $t \geq t_0 > 0$.

ТЕОРЕМА 2.3 Для того, чтобы $\int_a^\omega f(x,y)g(x,y)dx$ сходился равномерно на Y достаточно чтобы выполнялась одна из пар условий:

i_1) Существует $M \in \mathbb{R}$, т.ч. для всех $b \in [a;\omega)$ и всех $y \in Y$

$$\left| \int_a^b f(x,y)dx \right| < M.$$

ii_1) Для всех $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x на $[a;\omega)$ и $g(x,y) \rightrightarrows 0$ на Y при $x \to \omega$.

i_2) Интеграл $\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

ii_2) Для всех $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x на $[a;\omega)$ и существует $M \in \mathbb{R}$, т.ч. для всех $x \in [a;\omega)$ и всех $y \in Y$

$$|g(x,y)| < M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Использованием второй теоремы о среднем для интеграла:

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)g(x,y)\,dx = g(b_1,y)\int_{b_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(b_2,y)\int_{\xi}^{b_2} f(x,y)\,dx,$$

и применением критерия Коши ◀

ПРИМЕР 2.4. 1) Напомним, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ сходится в том и только том случае, когда $\alpha > 0$.

Рассмотрим функции $f(x,\alpha) = \sin x$ и $g(x,\alpha) = \frac{1}{x^\alpha}$. Для них выполняется пара условий i_1), ii_1) при $\alpha \geq \alpha_0 > 0$. Отметим что поскольку интеграл расходится при $\alpha = 0$, то по следствию из теоремы 2.1 на множестве $\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha > 0\}$ равномерной сходимости нет.

2) Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx$ сходится равномерно на $[0; +\infty)$. Действительно, для функций $f(x,y) = \frac{\sin x}{x}$ и $g(x,y) = e^{-xy}$ при $y \geq 0$ выполнены условия i_2), ii_2).