Лекция 3: Несобственные интегралы, зависящие от параметров

3.1 Предельный переход под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Теорема 3.1: Пусть при каждом $y \in Y$ имеет смысл (собственный или несобственный) интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$, и $y_0 \in Y$, т.г. $\mathring{U}(y_0) \subset Y$. Тогда, если

1) для каждого $b \in [a;\omega)$ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a,b]$ при $y \to y_0$,
2) интеграл $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на Y,

то сходится $\int_a^\omega \varphi(x)\,dx$, и имеет место равенство

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^\omega f(x,y)\,dx = \int_a^\omega \varphi(x)\,dx.$$

$$\begin{tikzcd}
f_t(x) \arrow[r, rightrightarrows, "t\to t_0"'] \arrow[d, "x\to x_0"] & f(x) \arrow[d, "\exists\ x\to x_0"] \\
F_t \arrow[r, "\exists", "t\to t_0"'] & F
\end{tikzcd}$$

Теорема 16.1

Доказательство: Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F_b(y) := \int_a^b f(x,y)\,dx \arrow[r, rightrightarrows, "\text{условие 2)}", "b\to\omega"'] \arrow[d, "y\to y_0"] & \int_a^\omega f(x,y)\,dx =: F(y) \arrow[d, "y\to y_0"] \\
\int_a^b \varphi(x)\,dx \arrow[r, "b\to\omega"'] & \int_a^\omega \varphi(x)\,dx
\end{tikzcd}$$

в силу 1) и теорема 16.3

существуют и совпадают по теореме 16.1

Пример 3.1: ! $Y = \{y > 0\}$, $f(x,y) = \begin{cases} 1/y, & 0 \le x \le y, \\ 0, & y < x. \end{cases} \Rightarrow f(x,y) \underset{y\to+\infty}{\rightrightarrows} 0$ на $[0;+\infty)$.

Рассмотрим $\int_0^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^y \frac{1}{y}\,dx = 1 \underset{y\to+\infty}{\not\to} 0$

Заметим, что этот интеграл не сходится равномерно на $Y = [0;+\infty)$. Этот пример показывает, что в теореме 3.1 нельзя отказаться от условия 2)

Пример 3.2: Рассмотрим $f_n(x) = n(1 - x^{1/n})$, $X = (0;+\infty)$. Очевидно, что $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\frac{1}{x}$ на $(0;+\infty)$. Заметим, что сходимость равномерная на любом отрезке $[a;b]$ промежутка $(0;+\infty)$. Действительно, поскольку функция x^t является выпуклой вниз по t при фиксированном $x>0$, то отношение $(x^t - x^0)/(t-0)$ не возрастает в малой правой полуокрестности $t=0$, и $\frac{x^t - x^0}{t-0} \xrightarrow[t\to+0]{} \ln x$. Тогда $n(1 - x^{1/n}) \underset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} \ln\frac{1}{x}$ на каждом $[a,b]$.

Имеется оценка, при $0 < x \le 1$

$$0 \le n(1 - x^{1/n}) \le \ln\frac{1}{x}.$$

Интеграл $\int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx$ сходится, поэтому $\int_0^1 n(1-x^{1/n})\,dx$ сх-ся равномерно.
Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n(1 - x^{1/n})\,dx = \int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx.$$

Следствие: Пусть $f(x,y) \in C([a;\omega) \times [c;d])$ и $\int_a^\omega f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c;d]$. Тогда $F(y)$ непрерывна на $[c;d]$.

Пример 3.3: В примере 2.4 2) было показано, что $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx$ сходится равномерно на $[0;+\infty)$. Для любого $d>0$ функция $\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\in C([0;+\infty)\times[0;d])$, поэтому $F(y)$ непрерывна на $[0;d]$. Таким образом, $F\in C([0;+\infty))$, в частности,

$$\lim_{y\to+0}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

3.2 Дифференцирование несобственного интеграла по параметру

Теорема 3.2: Пусть

1) $f(x,y),\ f'_y(x,y)\in C([a;\omega)\times[c;d])$.
2) Интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^{\omega}f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c;d]$.
3) Интеграл
$$F(y)=\int\limits_a^{\omega}f(x,y)dx$$
сходится при каком-то $y_0\in[c;d]$

Тогда интеграл $F(y)$ сходится равномерно на $[c;d]$, сама функция $F(y)$ дифференцируема на $[c;d]$, и справедливо

$$F'(y)=\int\limits_a^{\omega}f'_y(x,y)dx.$$

Доказательство: Рассмотрим собственный интеграл

$$F_b(y)=\int\limits_a^{b}f(x,y)dx,\quad b\in[a;\omega).$$

Функция $F_b(y)$ дифференцируема на $[c;d]$ по теореме 1.2 (правило Лейбница), и $(F_b)'_y(y)=\int\limits_a^{b}f'_b(x,y)dx$.

Семейство $(F_b)'_y(y)\underset{b\to\omega}{\rightrightarrows}\Phi(y)$ на $[c;d]$ (условие 2)). В то же время величина $F_b(y_0)$ сходится при $b\to\omega$ по условию 3).

Тогда по теореме 16.3

$$F_b(y)\underset{b\to\omega}{\rightrightarrows}F(y)\text{ на }[c;d],\text{ и }F'(y)=\Phi(y).$$

Определение 3.1: Гамма-функция Эйлера — это интеграл

$$\Gamma(\alpha):=\int\limits_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Очевидно, что $D(\Gamma)=\{\alpha>0\}$.

Пример 3.4: 1) Рассмотрим $\int\limits_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-xy}dx$, он сходится равномерно на $[y_0;+\infty)$, где $y_0>0$, в силу оценки

$$0\le x^{\alpha}e^{-xy}\le x^{\alpha}e^{-xy_0}<e^{-\frac{xy_0}{2}},$$

выполняющейся для достаточно больших $x\in\mathbb{R}$. Тогда по теореме 3.2 функция $F(y)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-xy}dx$ бесконечно дифф-ма при $y>0$,

$$F^{(n)}(y)=(-1)^n\int\limits_0^{+\infty}x^ne^{-xy}dx.$$

Заметим, что $F(y)=\frac{1}{y}$, $F^{(n)}(y) = (-1)^n \frac{n!}{y^{n+1}}$, поэтому

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-xy}\,dx = \frac{n!}{y^{n+1}}.$$

В частности, при $y=1$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!, \quad \text{т.е.} \quad \boxed{\Gamma(n+1) = n!}$$

2) Докажем, что гамма-функция бесконечно дифференцируема и

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x\, e^{-x}\,dx. \qquad (3.1)$$

Сначала покажем, что указанный интеграл сходится равномерно на любом $[a;b] \subset (0;+\infty)$

Пусть $\alpha \geqslant a > 0$, тогда найдётся $c_n > 0$, т.ч.

$$|x^{\alpha-1} \ln^n x\, e^{-x}| < x^{a/2-1} \quad (\text{т.к. } x^{a/2} \ln^n x \to 0 \text{ при } x \to +0)$$

при $0 < x \leqslant c_n$. По признаку Вейерштрасса

$$\int_0^{c_n} x^{\alpha-1} \ln^n x\, e^{-x}\,dx \quad \text{сходится равномерно на } [a,+\infty).$$

Пусть $\alpha \leqslant b < +\infty$, то для $x \geqslant 1$: $|x^{\alpha-1} \ln^n x\, e^{-x}| \leqslant x^{b-1} |\ln^n x|\, e^{-x}$.

Поэтому $\int_{c_n}^{+\infty} x^{\alpha-1} \ln^n x\, e^{-x}\,dx$ сходится равномерно по α на промежутке $(0;b]$

Таким образом, интеграл сходится равномерно на каждом $[a;b] \subset (0;+\infty)$. Но тогда по теореме 3.2 формула (3.1) верна на любом $[a;b]$, а значит и для любого $\alpha > 0$. ◀

Пример 3.5. Вычислим интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Пусть $F(y)$ как в примере 3.3, тогда

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} \sin x\, e^{-xy}\,dx, \quad \text{т.к. интеграл в правой части сходится равномерно на } \{y \geqslant y_0 > 0\}.$$

Легко найти, что $F'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$, $y>0$, поэтому

$$F(y) = \operatorname{arctg} y + C, \quad y > 0.$$

Т.к. $\underset{\sim\sim\sim}{F(y) \to 0}$ при $\underset{\sim\sim\sim}{y \to +\infty}$, то $C = \frac{\pi}{2}$, т.е. $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$ ◀

(переверните страницу)

(33) Интегрирование несобственного интеграла по параметру

Теорема 3.3: Пусть

1) $f(x,y)\in C([a;\omega)\times[c;d])$.
2) Интеграл $$F(y)=\int_a^\omega f(x,y)\,dx$$ сходится равномерно на $[c;d]$.

Тогда функция $F(y)$ интегрируема на $[c;d]$, и
$$\int_c^d dy\int_a^\omega f(x,y)\,dx=\int_a^\omega dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Доказательство: По теореме 1.3 для любого $b\in[a;\omega)$
$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

из 2) и теоремы 1.6.3 $\Big\downarrow\ b\to\omega$ $\qquad\qquad$ $\Big\downarrow\ b\to\omega$

$$\int_c^d dy\int_a^\omega f(x,y)\,dx=\int_a^\omega dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$
◀

Следствие: Пусть

1) $f\in C([a;\omega)\times[c;\tilde\omega))$
2) Интеграл $F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ сходится равномерно на любом $[c;d]\subset[c;\tilde\omega)$, а интеграл $\Phi(x)=\int_c^{\tilde\omega} f(x,y)dy$ сходится равномерно на любом $[a;b]\subset[a;\omega)$.
3) Существует хотя бы один из повторных интегралов
$$\int_c^{\tilde\omega} dy\int_a^\omega |f(x,y)|\,dx,\quad \int_a^\omega dx\int_c^{\tilde\omega}|f(x,y)|\,dy.$$

Тогда
$$\int_c^{\tilde\omega} dy\int_a^{\omega} f(x,y)\,dx=\int_a^\omega dx\int_c^{\tilde\omega} f(x,y)\,dy.$$

Пример 3.6: Проверим равенство ($\alpha>0$ и $\beta>0$)
$$\int_0^{+\infty}dy\underbrace{\int_0^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dx}_{\substack{\text{сходится равномерно}\\ \text{на } [0;+\infty)\ \text{(см. пример 2.1-2))}}}=\int_0^{+\infty}dx\underbrace{\int_0^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dy}_{\substack{\text{сходится равномерно}\\ \text{на } [0;+\infty)\ \text{(см. пример 2.1-1))}}}.\qquad(3.2)$$

Заметим, что повторный интеграл
$$\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}x^\alpha y^{\alpha+\beta+1}e^{-(1+x)y}\,dx=\left(\int_0^{+\infty}y^\beta e^{-y}dy\right)\cdot\left(\int_0^{+\infty}u^\alpha e^{-u}du\right),\ y\neq0.$$

При $y=0$, он равен 0. Тогда по следствию соотношение (2) выполняется.