Лекция 4: Интегралы Эйлера

4.1 Бета-функция

Определение 4.1: Эйлеровым интегралом первого рода (бета-функцией) называется

$$B(\alpha,\beta):=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Свойства бета-функции:

1°. Область определения. $\alpha>0$ и $\beta>0$.

2°. Симметричность. $B(\alpha,\beta)=B(\beta,\alpha)$.

▶ $$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\left/\begin{matrix}\text{замена}\\ x=1-t\end{matrix}\right/=-\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}(-dt)=B(\beta,\alpha)$$ ◀

3°. Формула понижения. При $\alpha>1$ имеем $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta)$.

▶ $$B(\alpha,\beta)=-\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1+\frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx=$$

$$=\frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)(1-x)^{\beta-1}dx=\frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}\left[(1-x)^{\beta-1}-x(1-x)^{\beta-1}\right]dx=\frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta)-$$

$$-\frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta).$$ ◀

В силу симметричности, $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\beta-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta-1)$ при $\beta>1$.

Отметим, что $B(\alpha,1)=\frac{1}{\alpha}$. Тогда получаем, что для $n\in\mathbb{N}$

$$B(\alpha,n)=\frac{n-1}{\alpha+n-1}B(\alpha,n-1)=\frac{n-1}{\alpha+n-1}\cdot\frac{n-2}{\alpha+n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(n-1)}{\alpha+n-(n-1)}B(\alpha,1)=\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)};$$

а для $m,n\in\mathbb{N}$

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

4°. Другое интегральное представление B-функции.

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy.$$

▶ Рассмотрим замену переменной $x=\frac{y}{1+y}$: $y=\frac{x}{1-x}$ возрастает на $(0;1)$, $0<y<+\infty$.

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx=\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{\beta-1}\frac{dy}{(1+y)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}dy.$$ ◀

4.2 Гамма-функция

Напомним, что гамма-функция — это интеграл

$$\Gamma(\alpha):=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Мы уже знаем, что $D(\Gamma)=(0;+\infty)$, $\Gamma(\alpha)\in C^{\infty}(0;+\infty)$ и

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\ln^n x\, e^{-x}dx,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Свойства гамма-функции:

1°. **Формула понижения.** $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

▶ $$\Gamma(\alpha+1):=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\,dx=-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=:\alpha\Gamma(\alpha).$$ ◀

2°. **Формула Эйлера-Гаусса.** $\Gamma(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\cdot\dfrac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}$.

▶ Сделаем замену $x=\ln\frac{1}{u}$ в интеграле, определяющем Γ-функцию,
$$\Gamma(\alpha)=\int_0^1\ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right)du,$$
Согласно примеру 3.2 последовательность $f_n(u)=n(1-u^{1/n})$ монотонно возрастает на $0<u<1$ и сходится к функции $\ln(1/u)$ при $n\to\infty$, а также при $\alpha\geq 1$
$$\int_0^1\ln^{\alpha-1}\left(\frac{1}{u}\right)du=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\int_0^1\left(1-u^{1/n}\right)^{\alpha-1}du.$$
Итак, $$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-1}\int_0^1\left(1-u^{1/n}\right)^{\alpha-1}du=\Big/\text{сделаем замену } u=v^n \text{ в интеграле}\Big/=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{\alpha-1}dv=$$
$$=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}B(n,\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}B(\alpha,n)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\cdot\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}.$$
Мы доказали, что
$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}B(\alpha,n)\quad\text{при}\quad\alpha\geq 1.$$
При $0<\alpha<1$,
$$\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}n^{\alpha+1}B(\alpha+1,n)=\frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}n^{\alpha+1}\frac{(\alpha+1)-1}{(\alpha+1)+n-1}B(\alpha,n)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+n}B(\alpha,n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{\alpha}{n}+1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}B(\alpha,n)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}B(\alpha,n).$$ ◀

3°. **Формула дополнения.** $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$ при $0<\alpha<1$.

▶ $$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}\cdot n^{1-\alpha}\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdot\ldots\cdot(n-\alpha)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{\alpha(1+\frac{\alpha}{1})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{\alpha}{n-1})}\cdot\frac{1}{(1-\frac{\alpha}{1})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{\alpha}{n-1})(n-\alpha)}=\frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1-\frac{\alpha^2}{1^2})(1-\frac{\alpha^2}{2^2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{\alpha^2}{(n-1)^2})}.$$
Таким образом, при $0<\alpha<1$
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\frac{\alpha^2}{n^2}}.$$
Используя разложение
$$\sin\pi\alpha=\pi\alpha\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{n^2}\right),$$
получаем искомую формулу ◀

Пример 4.1: По формуле дополнения $\Gamma^2(\frac{1}{2})=\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi\Rightarrow\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Заметим, что
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}x^{-1/2}e^{-x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}\Rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
интеграл Эйлера-Пуассона.

4.3 Связь между функциями B и Γ.

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

▶ При $y>0$ получаем, что $\Gamma(\alpha)=y^{\alpha}\int\limits_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-xy}\,dx.$

Поэтому $\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)\cdot y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}=y^{\alpha-1}\int\limits_0^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx,$

$$\Gamma(\alpha+\beta)\cdot B(\alpha+\beta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)\,y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}}\,dy=\int\limits_0^{+\infty}\left(y^{\alpha-1}\int\limits_0^{+\infty}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dx\right)dy\overset{\text{см. пример 3.6}}{=}$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}y^{\alpha-1}x^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+y)x}\,dy\right)dx=\int\limits_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int\limits_0^{+\infty}(xy)^{\alpha-1}e^{-(xy)}x\,dy\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left(x^{\beta-1}e^{-x}\int\limits_0^{+\infty}u^{\alpha-1}e^{-u}\,du\right)dx=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$ ◀

4.4 Некоторые приложения

Пример 4.2: Докажем, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}\varphi\,\cos^{\beta-1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$

Сделаем в интеграле замену $x=\sin^2\varphi$:

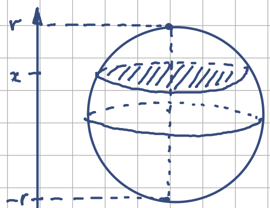
$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}=\int\limits_0^{1}x^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot(1-x)^{\frac{\beta-1}{2}}\cdot\frac{dx}{2\,x^{1/2}(1-x)^{1/2}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^1x^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right).$$

В частном случае,

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}.$$

Аналогично, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha-1}\varphi\,d\varphi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}$ ◀

Пример 4.3: Пусть $V_n(r)$ — объём n-мерного шара. Мы знаем, что $V_1(r)=2r$, $V_2(r)=\pi r^2$.



Если $V_{n-1}(r)=c_{n-1}r^{n-1}$, то

$$V_n(r)=\int\limits_{-r}^{r}c_{n-1}(r^2-x^2)^{\frac{n-1}{2}}dx=\left(c_{n-1}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi\,d\varphi\right)\cdot r^n,$$

т.е. $V_n(r)=c_n\cdot r^n$, где

$$c_n=2c_{n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi\,d\varphi=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\,c_{n-1}.$$

Откуда находим, что

$$c_n=(\sqrt{\pi})^2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\,c_{n-2}=(\sqrt{\pi})^{n-1}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\,c_1=(\pi)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\,c_1=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.$$