Лекция 5: Ряды Фурье

5.1 Тригонометрический ряд Фурье

Определение 5.1. Пусть для функции $f: (-\pi; \pi) \to \mathbb{R}$ имеют смысл интегралы

(1) $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

(2) $$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Тогда тригонометрический ряд

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$$

называется тригонометрическим рядом Фурье функции f.

Рассмотрим пространство $R_2([-\pi; \pi]; \mathbb{R}) := \{f : (-\pi; \pi) \to \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty\}$.
В силу неравенства

$$|f(x) g(x)| \leq \frac{1}{2} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 \right),$$

для функций $f, g \in R_2([-\pi; \pi]; \mathbb{R})$ определено скалярное произведение (почти)

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Относительно этого скалярного произведения система функций

$$\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k \in \mathbb{N}}$$

является ортогональной. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \text{ при } m \neq n, \quad m, n \in \mathbb{N};$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \; n \in \mathbb{N}; \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi.$$

5.2 Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля

Теорема 5.1 (неравенство Бесселя)
Пусть $f \in R_2[-\pi; \pi]$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2 \right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Пример 5.1: Рассмотрим тригонометрический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$, который сходится на $\mathbb{R}$. Поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ расходится, то этот тригонометрический ряд не может быть рядом Фурье никакой функции $f \in R_2[-\pi; \pi]$.

Для функции $f \in R_2[-\pi; \pi]$ обозначим $S_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$ — n-ю частичную сумму её ряда Фурье.
Введённое выше скалярное произведение индуцирует на $R_2[-\pi; \pi]$ норму

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}.$$

Тогда величина $\|f - S_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx}$ называется **средне квадратичным отклонением** S_n от f на $[-\pi;\pi]$.

Сходимость ряда Фурье к f можно понимать в среднем, т.е.

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{в } R_2[-\pi;\pi] \iff \|f - S_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

а можно понимать поточечно, т.е. сходится ли функциональная последовательность $S_n(x)$ к $f(x)$ на каком-то множестве.

Теорема 5.2: Пусть $f \in R_2[-\pi;\pi]$. Тогда её ряд Фурье сходится к f в среднем, т.е.

$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\} \right) \right|^2 dx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

и имеется **равенство Парсеваля**

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{|a_k|^2 + |b_k|^2\}.$$

5.3 Комплексная форма записи

Используя формулы $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, мы можем переписать ряд Фурье функции f в виде

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

где

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k > 0, \\ \frac{1}{2} a_0, & k = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0. \end{cases} \qquad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5.4 Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Определение 5.2: Функция f называется **кусочно-непрерывной функцией на $[a;b]$**, если существует конечный набор точек $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, т.ч.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

функция определена и непрерывна на каждом интервале $(x_{j-1}; x_j)$, $j = 1, \ldots, n$, и имеет односторонние пределы в его концах.

Определение 5.3: Если функция имеет на отрезке кусочно-непрерывную производную, то она называется **кусочно непрерывно дифференцируемой функцией** на этом отрезке.

Теорема 5.3: (достаточн. услов. сходимости ряда Фурье в точке)

Пусть f кусочно непрерывно дифференцируемая функция на $[-\pi;\pi]$. Тогда её ряд Фурье в т. $x \in (-\pi;\pi)$ сходится к значению $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, где $f(x+0) = \lim_{t\to x+0} f(t)$, $f(x-0) = \lim_{t \to x-0} f(t)$,

а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ к значению $\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.

Пример 5.2. Рассмотрим функцию $f(x)=\cos\alpha x$, где $-1<\alpha<1$. Её коэффициенты Фурье:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(\alpha-n)x+\cos(\alpha+n)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}+\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$$

$b_n=0$, т.к. функция $\cos\alpha x$ чётная.

Функция $f(x)=\cos\alpha x$ непрерывно дифференцируемая на $[-\pi;\pi]$, а $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\cos\pi\alpha$. Поэтому по теореме 7.3 для $x\in[-\pi;\pi]$ имеем равенство

$$\cos\alpha x=\frac{2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi}\left(\frac{1}{2\alpha^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right).$$

В частности, при $x=\pi$ получаем равенство

$$\operatorname{ctg}\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}=\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}.$$

При $|\alpha|\le\alpha_0<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^2-n^2}$ сходится равномерно, т.к. $\left|\frac{1}{\alpha^2-n^2}\right|\le\frac{1}{n^2-\alpha_0^2}$.
Поэтому мы можем почленно интегрировать этот ряд: пусть $|x|<1$

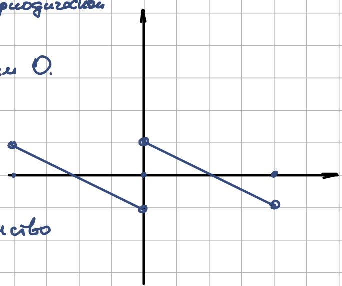
$$\int_0^x\left(\operatorname{ctg}\pi\alpha-\frac{1}{\pi\alpha}\right)d\alpha=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2\alpha\,d\alpha}{\alpha^2-n^2}.$$

Тогда

$$\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\Big|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty}\ln|\alpha^2-n^2|\Big|_0^x\Rightarrow\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\sum_{n=1}^{\infty}\{\ln|x^2-n^2|-\ln n^2\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)\Rightarrow\boxed{\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right),\ |x|<1.}$$

Пример 5.3: Разложим функцию $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$, $0\le x\le 2\pi$, в ряд Фурье.
Для этого продолжим функцию до 2π-периодической на всей числовой прямой и переопределим её в точках $2\pi k$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, значением 0.



Тогда

$a_n=0$, т.к. функция нечётная

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{n}.$$

Тогда при $x\in(0;2\pi)$ имеет место равенство

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Из него следует, что $\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}$, $0<x<\pi$. Вычитая из первого равенства второе, получим, что при $x\in(0;\pi)$:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

$\frac{4}{p+1}<10^{-9}$ $\quad p\ge4\cdot10^9$

При $x=\frac{\pi}{2}$, получим, что $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$
Имеем оценку $\left|\pi-4\sum_{n=1}^{p}\frac{(-1)^n}{n}\right|<\frac{4}{p+1}<10^{-9}$, если $p\ge4\cdot10^9$.