Лекция 6: Интеграл Римана по n-мерному промежутку и по множеству

6.1 Интеграл по промежутку как предел интегральных сумм

Пусть $a=(a^1,\dots,a^n)$, $b=(b^1,\dots,b^n)\in\mathbb{R}^n$, т.ч. $a^i<b^i$, $i=1,\dots,n$. Назовём **n-мерным промежутком** или **n-мерным параллелепипедом** в $\mathbb{R}^n$ множество

$$I=I_{a,b}:=\{x\in\mathbb{R}^n:\ a^i\le x^i\le b^i,\ i=1,\dots,n\}.$$

Число $\mu(I):=\prod\limits_{i=1}^{n}(b^i-a^i)$ называется **объёмом** или **мерой промежутка** I.

Лемма 6.1: Мера промежутка в $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет свойствам:

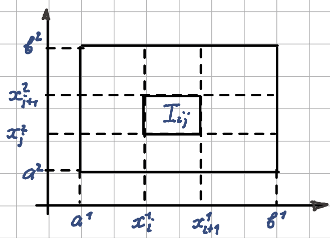
1°. (Однородность) $\mu(I_{\lambda a,\lambda b})=\lambda^n\mu(I_{a,b})$, где $\lambda\ge 0$.

2°. (Аддитивность) Если промежутки $I, I_1,\dots,I_k$ такие, что $I=\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i$ и $I_1,\dots,I_k$ попарно не имеют общих внутренних точек, то

$$\mu(I)=\sum_{i=1}^{k}\mu(I_i).$$

3°. Если $I\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_i$, то $\mu(I)\le\sum\limits_{i=1}^{k}\mu(I_i)$.

Разбиения координатных отрезков $[a^i;b^i]$, $i=1,\dots,n$, индуцируют разбиение P промежутка I:
$$I=\bigcup_{j=1}^{k}I_j.$$



Величина $\lambda(P)=\max\limits_{1\le j\le k}d(I_j)$, где $d(I_j)$ — диаметр промежутка I_j, называется **параметром разбиения** P.
Набор $\xi:=\{\xi_1,\dots,\xi_k\}$ точек, т.ч. $\xi_j\in I_j$, называется **набором отмеченных точек разбиения** P.

Пусть $f: I\to\mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определённая на I, $P=\{I_1,\dots,I_k\}$ — разбиение промежутка I, $\xi=\{\xi_1,\dots,\xi_k\}$ — набор отмеченных точек разбиения P. Тогда **интегральной суммой** функции f, соответствующей P и ξ, называется сумма

$$\sigma(f,P,\xi):=\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)\mu(I_i).$$

Определение 6.1: **Интегралом (Римана) функции f по промежутку** I называется число A $\Leftrightarrow$ для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что для всякого разбиения P промежутка I с $\lambda(P)<\delta$ и для всякого набора ξ отмеченных точек разбиения P, выполняется неравенство

$$|\sigma(f,P,\xi)-A|<\varepsilon.$$

(последнее условие означает, что $A:=\lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f,P,\xi)$). Обозначение

$$\int\limits_I f(x)\,dx,\quad \int\limits_I f(x^1,\dots,x^n)\,dx^1\dots dx^n \quad\text{или}\quad \int\limits_I\!\dots\!\int f(x^1,\dots,x^n)\,dx^1\dots dx^n.$$

Обозначим через $R(I)$ множество всех функций $f: I \to \mathbb{R}$, для которых интеграл по промежутку I существует.

Теорема 6.1: (необходимое условие интегрируемости) Пусть $f \in R(I)$. Тогда $f \in B(I)$ (т.е. функция f ограничена на I).

Доказательство: Рассмотрим произвольное разбиение P промежутка I. Если ξ', ξ'' – наборы отмеченных точек, которые отличаются только выбором точек ξ'_{i_0}, ξ''_{i_0} из I_{i_0}, то

$$\left| \sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'') \right| = \left| f(\xi'_{i_0}) - f(\xi''_{i_0}) \right| \mu(I_{i_0}).$$

Если f неограничена на I, то меняя только одну из точек ξ'_{i_0}, ξ''_{i_0}, мы можем сделать правую часть указанного выше равенства сколь угодно большой. Тогда по критерию Коши для предела интегральных сумм интеграл от f не существует. ◀

(6.2) Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение 6.2: Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является **множеством меры нуль (в смысле Лебега)** $\Leftrightarrow$ когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более чем счётный набор $\{I_i\}$ n-мерных промежутков, покрывающих E (т.е. $E \subset \bigcup_i I_i$), т.ч. $\sum_i \mu(I_i) < \varepsilon$.

Лемма 6.2:
1° Точка в $\mathbb{R}^n$ и конечный набор точек в $\mathbb{R}^n$ являются множествами меры нуль.
2° Объединение конечного или счётного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль.
3° Подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль.
4° Промежуток $I_{a,b}$ не является множеством меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

Пример 6.1: 1) Множество точек в $\mathbb{R}^n$ с рациональными координатами является множеством меры нуль.

2) Пусть $I \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – промежуток, $f \in C(I; \mathbb{R})$. Тогда график функции

$$\Gamma_f := \{ (x^1, \dots, x^{n-1}, y) \in \mathbb{R}^n : \ (x^1, \dots, x^{n-1}) \in I \ \text{и} \ y = f(x^1, \dots, x^{n-1}) \}$$

является множеством меры нуль в $\mathbb{R}^n$.

▶ Промежуток I является компактом в $\mathbb{R}^n$, поэтому функция f является равномерно непрерывной на I. Для $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать $\delta > 0$, т.ч. для всех точек $x_1, x_2 \in I$ с $|x_1 - x_2| < \delta$ мы имеем $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Выберем разбиение P с $\lambda(P) < \delta$, тогда на промежутке разбиения I_i колебание $\omega(f; I_i) := \sup_{x_1, x_2 \in I_i} |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Рассмотрим n-мерный промежуток

$$\tilde{I}_i := I_i \times [f(x_i) - \varepsilon; f(x_i) + \varepsilon], \quad \text{где } x_i \text{ – произвольная точка в } I_i.$$

Он, очевидно, содержит всю часть Γ_f лежащую на I_i. Объединение $\bigcup_i \tilde{I}_i$ покрывает весь график Γ_f. Заметим, что $\sum_i \mu(\tilde{I}_i) = \sum_i \mu(I_i) \cdot 2\varepsilon = 2\varepsilon \mu(I)$ ◀

Будем говорить, что какое-то свойство выполняется **почти во всех точках** множества $\Leftrightarrow$ когда выполняется на этом множестве во всех точках за исключением подмножества меры нуль.

Теорема 6.2: (критерий Лебега) $f \in R(I) \Leftrightarrow f \in B(I)$ и f непрерывна п.в. на I.

6.3 Критерий Дарбу

Пусть $f: I \to \mathbb{R}$, $P = \{I_i\}$ – разбиение I. Рассмотрим

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x).$$

Величины

$$s(f,P) := \sum_i m_i \mu(I_i), \quad S(f,P) := \sum_i M_i \mu(I_i)$$

называются **нижней** и **верхней суммой** (Дарбу) функции f на промежутке I, соответствующей P.

Лемма 6.3: Имеют место соотношения:

1) $s(f,P) = \inf_{\xi} \sigma(f,P,\xi) \leq \sigma(f,P,\xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f,P,\xi) = S(f,P)$;
2) $s(f,P) \leq s(f,P') \leq S(f,P') \leq S(f,P)$, где P' – измельчение разбиения P;
3) для любых разбиений P_1 и P_2
$$s(f,P_1) \leq S(f,P_2).$$

Для доказательства 3) нужно рассмотреть измельчение $P_1 \cup P_2$ разбиений P_1, P_2.

Определение 6.3: **Нижним** и **верхним интегралом** (Дарбу) от функции $f: I \to \mathbb{R}$ по промежутку I называются величины

$$\underline{J} := \sup_P s(f,P) \quad \text{и} \quad \overline{J} := \inf_P S(f,P),$$

соответственно.

Теорема 6.3: (критерий Дарбу) $f \in R(I) \Leftrightarrow f \in B(I)$ и $\underline{J} = \overline{J}$.
(Общее значение $\underline{J}, \overline{J}$ совпадает с $\int_I f(x)dx$).

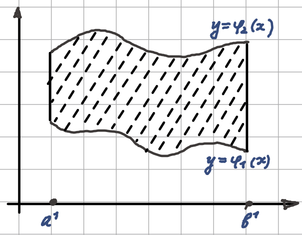
6.4 Интеграл по множеству

Определение 6.4: Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется **допустимым** $\Leftrightarrow$ когда E ограничено в $\mathbb{R}^n$, и его граница ∂E есть множество меры нуль (в смысле Лебега).

Пример 6.2: 1) Куб, тетраэдр, шар в $\mathbb{R}^3$ (в $\mathbb{R}^n$) являются допустимыми множествами

2) Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ – $(n-1)$-мерный промежуток, функции $\varphi_{1,2}: I \to \mathbb{R}$ непрерывны на I, и $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ для всех $x \in I$.

Область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная графиками Γ_{φ_1} и Γ_{φ_2} и боковой цилиндрической поверхностью, лежащей над ∂I, является допустимой в $\mathbb{R}^n$ (см. п.2 пример 6.1).



Поскольку граница ∂E множества $E \subset \mathbb{R}^n$ – это множество точек, т.ч. в любой их окрестности есть как точки множества E, так и точки $\mathbb{R}^n \setminus E$, то для множеств $E, E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ справедливо, что

1) ∂E – замкнутое в $\mathbb{R}^n$ множество;
2) $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;
3) $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;
4) $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

Лемма 6.4: Пусть $E_1, \dots, E_k$ – допустимые множества. Тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{k} E_i$ являются допустимыми множествами, $E_1 \setminus E_2$ – допустимое множество.

Определим для множества $E \subset \mathbb{R}^n$ его характеристическую функцию

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Очевидно, что χ_E п.в. непрерывна на $\mathbb{R}^n$, если E – допустимое множество, поскольку множество её точек разрыва совпадает с ∂E.

Определение 6.5: Пусть $f: E \to \mathbb{R}$. Тогда **интегралом функции f по множеству E** называется

$$\int\limits_E f(x)\,dx := \int\limits_{I \supset E} f(x)\chi_E(x)\,dx,$$

где I – произвольный промежуток, содержащий E, и мы считаем, что $f(x)\chi_E(x) = 0$ для точек вне E.
(Можно показать, что определение не зависит от выбора промежутка)

Теорема 6.4: $f \in R(E)$, где E – допустимое множество, $\Leftrightarrow$ когда $f \in B(E)$ и п.в. непрерывна E.

Доказательство: $f(x)\chi_E(x)$ может иметь разрывы в точках разрыва функции f и на ∂E, а граница ∂E – множество меры нуль.