Лекция 7:

7.1 Мера допустимого множества

Определение 7.1: **Мерой (Жордана)** или **объёмом** ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется величина

$$\mu(E) = \int_E 1 \cdot dx,$$

если этот интеграл существует.

По определению

$$\int_E 1 \cdot dx = \int_{I \supset E} \chi_E(x)\,dx,$$

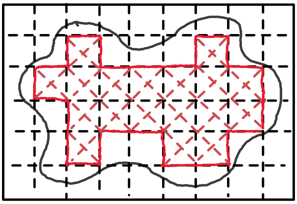
последний интеграл существует $\Leftrightarrow$ ∂E имеет меру нуль (по Лебегу) $\Leftrightarrow$ E – допустимое множество. Таким образом, мера Жордана существует только и только для допустимых множеств.

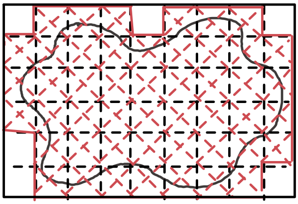
Если E – допустимое множество, тогда по критерию Дарбу

$$\mu(E) = \underline{\int_{I \supset E}} \chi_E(x)\,dx = \overline{\int_{I \supset E}} \chi_E(x)\,dx.$$

Заметим, что

$$\lim_{\lambda(P) \to 0} s(\chi_E, P) = \underline{\int_{I \supset E}} \chi_E(x)\,dx = \overline{\int_{I \supset E}} \chi_E(x)\,dx = \lim_{\lambda(P) \to 0} S(\chi_E, P).$$





Нижняя сумма $s(\chi_E, P) = \sum_i 1 \cdot \mu(I_i)$, где $I_i \subset E$, т.е. является объёмом вписанного во множество E многогранника. Верхняя же сумма $S(\chi_E, P) = \sum_i 1 \cdot \mu(I_i)$, где $I_i \cap E \neq \varnothing$, т.е. является объёмом описанного вокруг E многогранника.
Таким образом, $\mu(E)$ есть предел при $\lambda(P) \to 0$ объемов вписанных в E и описанных около E многогранников.

Определение 7.2: Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ наз-ся **множеством меры нуль в смысле Жордана** $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечное покрытие множества E промежутками $I_1, \ldots, I_k$, т.ч.

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Мера $\mu(E)$ ограниченного множества $E\subset\mathbb{R}^n$ существует $\Leftrightarrow$ когда граница ∂E имеет меру 0 в смысле Жордана. Поэтому говорят, что множество измеримо по Жордану, когда оно ограничено и ∂E имеет меру нуль в смысле Жордана.

Заметим, что если множество E допустимое, то граница ∂E является компактом. Из любого покрытия границы ∂E можно извлечь конечное подпокрытие. Поэтому, если E допустимое, то ∂E - множество меры нуль по Жордану.

Итак, $E\subset\mathbb{R}^n$ допустимое $\Leftrightarrow$ когда E измеримо по Жордану.

7.2 Свойства интеграла

Теорема 7.1: Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ - ограниченное. Тогда

1°. Множество $\mathcal{R}(E)$ является линейным пространством относительно операций сложения функций и умножения функции на число.

2°. Интеграл является линейным функционалом

$$\int_E : \mathcal{R}(E)\to\mathbb{R} \quad \text{на пространстве } \mathcal{R}(E)$$

Теорема 7.2: Пусть $E_1, E_2\subset\mathbb{R}^n$ - допустимые множества, функция f определена на $E_1\cup E_2$. Тогда

1) $$\exists\int_{E_1\cup E_2} f(x)\,dx \Leftrightarrow \exists\int_{E_1} f(x)dx \text{ и } \exists\int_{E_2} f(x)dx \Rightarrow \exists\int_{E_1\cap E_2} f(x)dx$$

2) Если $\mu(E_1\cap E_2)=0$, то
$$\int_{E_1\cup E_2} f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$$
при условии существования интегралов.

Доказательство: Часть 1) очевидно вытекает из критерия Лебега.

Докажем 2), вспомнив для начала,

$$\chi_{E_1\cup E_2}(x) = \chi_{E_1}(x)+\chi_{E_2}(x)-\chi_{E_1\cap E_2}(x).$$

Тогда $$\int_{E_1\cup E_2} f(x)dx = \int_{I\supset E_1\cup E_2} f(x)\chi_{E_1\cup E_2}(x)dx = \int_I f(x)\chi_{E_1}dx + \int_I f(x)\chi_{E_2}(x)dx - \int_I f(x)\chi_{E_1\cap E_2}(x)dx =$$
$$= \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

Интеграл $\int_{E_1\cap E_2} f(x)\,dx = 0$, т.к. $\mu(E_1\cap E_2)=0$. ◀

Теорема 7.3: Пусть $f\in\mathcal{R}(E)$. Тогда $|f|\in\mathcal{R}(E)$ и справедлива оценка
$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx$$

Доказательство: Если $f\in\mathcal{R}(E)$, то по критерию Лебега f непрерывна п.в. на E. Тогда $|f|$ тоже непрерывен п.в. на E. Следовательно, $|f|\in\mathcal{R}(E)$.

Неравенство получается предельным переходом по $\lambda(P)\to 0$ в
$$\left|\sum_i f(\xi_i)\mu(I_i)\right| \leqslant \sum_i |f(\xi_i)|\mu(I_i).$$ ◀

Теорема 7.4: Пусть $f \in R(E)$ и $f(x) \geq 0$ на E. Тогда $\int\limits_E f(x)dx \geq 0$.

Следствие 1: Пусть $f, g \in R(E)$ и $f(x) \leq g(x)$ на E. Тогда $\int\limits_E f(x)dx \leq \int\limits_E g(x)dx$.

Следствие 2: Пусть $f \in R(E)$ и $m \leq f(x) \leq M$ на допустимом множестве E. Тогда

$$m\mu(E) \leq \int\limits_E f(x)dx \leq M\mu(E).$$

Следствие 3: Пусть $f \in R(E)$, и $m = \inf\limits_E f(x)$, $M = \sup\limits_E f(x)$, то найдётся $\theta \in [m, M]$ т.ч. $\int\limits_E f(x)dx = \theta\mu(E)$.

Следствие 4: Пусть E – связное допустимое множество, $f \in C(E)$. Тогда существует точка $\xi \in E$: $\int\limits_E f(x)dx = f(\xi)\mu(E)$.

Лемма 7.1: Пусть $f: I \to \mathbb{R}$ неотрицательная (т.е. $f(x) \geq 0$ для $x \in I$), т.ч. $\int\limits_I f(x)dx = 0$. Тогда $f(x) = 0$ п.в. на I.

Если I заменить на допустимое множество E, то утверждение леммы останется в силе.

Доказательство: Если $f \in R(I)$, то по критерию Лебега f п.в. непрерывна на I. Докажем, что $f(a) = 0$ в каждой точке, в которой она непрерывна.

Предположим, что $f(a) > 0$. В силу непрерывности найдётся открытый промежуток $U_I(a)$ точки a, в которой $f(x) \geq c > 0$. Тогда

$$\int\limits_I f(x)dx = \int\limits_{U_I(a)} f(x)dx + \int\limits_{I \setminus U_I(a)} f(x)dx \geq \int\limits_{U_I(a)} f(x)dx \geq c\,\mu(U_I(a)) > 0$$

Полученное противоречие показывает, что $f(a) = 0$.

Применяя доказанное утверждение к функции $f(x)\chi_E(x)$ с учётом того, что $\mu(\partial E) = 0$, получим $f(x) = 0$ п.в. на E. ◀