Лекция 8:

(8.1) Сведение кратного интеграла к повторному

Теорема 8.1: (Фубини)

Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ – промежутки, функция $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема на промежутке $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Тогда интегралы

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx, \quad \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy, \quad \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)\,dx$$

существуют одновременно и совпадают между собой.

Внутренний интеграл $F(x) := \int_Y f(x,y)dy$ понимается как функция $F: X \to \mathbb{R}$, которой в точке x приписывается любое значение между $\underline{J}$ и $\overline{J}$, если в такой точке x интеграл $\int_Y f(x,y)dy$ не существует.

Доказательство: Пусть $P_X = \{X_i\}$, $P_Y = \{Y_j\}$ – разбиения промежутков X и Y, соответственно. Их прямое произведение $\{X_i \times Y_j\}$ даёт разбиение промежутка P.

Рассмотрим $s(f,P) := \sum\limits_{i,j} \inf\limits_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)\mu(X_i \times Y_j) \leq$

$$\leq \sum_i \inf_{x\in X_i}\Big(\sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x,y)\mu(Y_j)\Big)\mu(X_i) \leq \sum_i \inf_{x\in X_i}\Big(\underline{\int\limits_Y} f(x,y)dy\Big)\mu(X_i) \leq$$

$$\leq \sum_i \inf_{x\in X_i} F(x)\mu(X_i) \leq \sum_i \sup_{x\in X_i} F(x)\mu(X_i) \leq \sum_i \sup_{x\in X_i}\Big(\overline{\int\limits_Y} f(x,y)dy\Big)\mu(X_i)$$

$$\leq \sum_i \sup_{x\in X_i}\Big(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)\mu(Y_j)\Big)\mu(X_i) \leq \sum_{i,j} \sup_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)\mu(X_i\times Y_j) = S(f,P)$$

По условию $f \in R(X\times Y)$, поэтому нижняя сумма $s(f,P) \to \int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy$ и верхняя сумма $S(f,P) \to \int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy$ при $\lambda(P) \to 0$. Из оценок следует, что $F(x) \in R(x)$ и

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_X F(x)dx.$$

Аналогично доказывается и второе равенство. ◀

Следствие 1: Пусть $I = [a^1;b^1]\times\ldots\times[a^n;b^n] \subset \mathbb{R}^n$. Тогда интеграл

$$\int\limits_I f(x)dx = \int\limits_{a^n}^{b^n} dx^n \int\limits_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} dx^{n-1} \ldots \int\limits_{a^1}^{b^1} f(x^1,\ldots,x^n)\,dx^1.$$

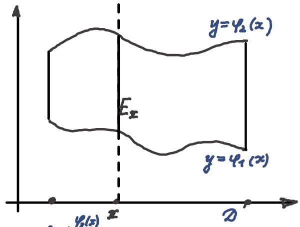
Следствие 2: Пусть D – ограниченное в $\mathbb{R}^{n-1}$ множество и такое множество

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^n:\ x\in D \text{ и } \varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\},$$

что $f \in R(E)$. Тогда

$$\int\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Доказательство: Обозначим через E_x сечение $\{(x,y)\in\mathbb{R}^n:\ x\in D$ и $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ для $x\in D$ и $E_x=\varnothing$ для $x\notin D$. Очевидно, что



$$\chi_E(x,y)=\chi_D(x)\chi_{E_x}(y).$$

Тогда
$$\int\limits_E f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_{I\supset E} f(x,y)\chi_E(x,y)\,dx\,dy=$$
$$=\int\limits_{I_x\supset D}dx\int\limits_{I_y\supset E_x} f(x,y)\chi_E(x,y)\,dy=\int\limits_{I_x}\Big(\int\limits_{I_y} f(x,y)\chi_{E_x}(y)\,dy\Big)\chi_D(x)\,dx=\int\limits_{I_x}\Big(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\Big)\chi_D(x)\,dx=$$
$$=\int\limits_D dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Следствие 3: Пусть D — измеримое в $\mathbb{R}^{n-1}$ множество и множество E (определённое как в следствии 1), функции $\varphi_{1,2}:D\to\mathbb{R}$ непрерывны. Тогда E измеримо в $\mathbb{R}^n$ и
$$\mu(E)=\int\limits_D(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\,dx.$$

Следствие 4: Пусть $I=I_x\times I_y$ — промежуток в $\mathbb{R}^n$, где I_x — $(n-1)$-мерный промежуток, а I_y — отрезок; $E\subset I$ — измеримое множество. Тогда для п.в. $y_0\in I_y$ сечение $E_{y_0}=\{(x,y)\in E:\ y=y_0\}$ множества E является измеримым, при этом
$$\mu(E)=\int\limits_{I_y}\mu(E_y)\,dy,$$
где $\mu(E_y)$ — $(n-1)$-мерная мера множества E_y, если оно измеримо, и любое число между $\underline{\int\limits_{E_y}} 1\cdot dx$ и $\overline{\int\limits_{E_y}} 1\cdot dx$ в ином случае.

8.2 Замена переменных в кратном интеграле

Рассмотрим диффеоморфизм φ промежутка $I_t\subset\mathbb{R}^n$ на некоторое множество D_x. Разбиению P промежутка I на $I_1,I_2,\dots,I_k$ соответствует разбиение D_x на множества $\varphi(I_i)$, $i=1,\dots,k$. Если все $\varphi(I_i)$ измеримы и попарно пересекаются по множествам меры нуль, то
$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx.$$

Предположив непрерывность функции f на D_x, по теореме о среднем получим, что
$$\int\limits_{\varphi(I_i)} f(x)\,dx=f(\xi_i)\mu(\varphi(I_i)),\quad\text{где } \xi_i\in\varphi(I_i).$$
Заметим $f(\xi_i)=f(\varphi(\tau_i))$, где $\tau_i=\varphi^{-1}(\xi_i)$.

Свяжем $\mu(\varphi(I_i))$ с $\mu(I_i)$. Если φ было бы линейным преобразованием, то $\varphi(I_i)$ был бы параллелепипедом, и $\mu(\varphi(I_i))=|\det\varphi'|\mu(I_i)$.

Однако диффеоморфизм локально является почти линейным отображением, поэтому можно считать, что $\mu(\varphi(I_i)) \approx |\det\varphi'(\tau_i)|\mu(I_i)$, если параметр разбиения достаточно мал. Тем самым, мы приходим к соотношению

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\varphi(I_i)} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{k} f(\varphi(\tau_i))|\det\varphi'(\tau_i)|\mu(I_i),$$

в котором справа стоит интегральная сумма функции $f(\varphi(t))|\det\varphi'(t)|$ по промежутку I_t для разбиения P и набора отмеченных точек τ. Поэтому предельным переходом по $\lambda(P)\to 0$ приходим к формуле

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{I_t} f(\varphi(t))|\det\varphi'(t)|dt.$$

Напомним, **носителем** функции $f: D\to\mathbb{R}$ называется замыкание в области D множества всех нулей функции f в области D:

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x\in D: f(x)=0\}}.$$

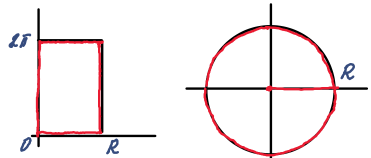
Теорема 8.2: Пусть D_t, D_x — ограниченные открытые множества в $\mathbb{R}^n$, функция $f\in R(D_x)$, $\operatorname{supp} f$ — компакт в D_x. Тогда функция $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|\in R(D_t)$, и

$$\int_{\varphi(D_t)} f(x)dx = \int_{D_t}(f\circ\varphi)(t)|\det\varphi'(t)|dt.$$

Теорема 8.3: Пусть $D_t\subset\mathbb{R}^n_t$, $D_x\subset\mathbb{R}^n_x$ — измеримые множества, некоторые множества $S_t\subset D_t$ и $S_x\subset D_x$ имеют меру нуль (в смысле Лебега), отображение $\varphi: D_t\to D_x$, которое диффеоморфно и с ограниченным якобианом отображает $D_t\setminus S_t$ в $D_x\setminus S_x$. Тогда, если $f\in R(D_x)$, то $(f\circ\varphi)|\det\varphi'|\in R(D_t\setminus S_t)$, и имеет место равенство

$$\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t\setminus S_t}(f\circ\varphi)(t)|\det\varphi'(t)|dt$$

Пример 8.1: Формулы $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ задают отображение прямоугольника $I=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2: 0\le r\le R$ и $0\le\varphi\le 2\pi\}$ на круг $K=\{x^2+y^2\le R^2\}$, но не является диффеоморфизмом: прямая точки $(0,\varphi)$ переходят в т. $(0,0)$, образы $(r,0)$ и $(r,2\pi)$ совпадают.



Пусть E — объединение ∂K и радиуса, идущего в точку $(0,R)$. Отображение из $I\setminus\partial I$ в $K\setminus E$ уже будет являться диффеоморфизмом открытых множеств, якобиан которого не превосходит R. Поэтому

$$\iint_K f(x,y)dxdy \overset{T.8.3}{=} \iint_I f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi \overset{T.8.1}{=} \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)dr.$$