Лекция №9: Несобственные кратные интегралы

Определение 9.1: Последовательность множеств $\{E_n\}$ наз-ся исчерпанием множества $E \subset \mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда
1) E_n – измеримые подмножества множества E для всех $n \in \mathbb{N}$;
2) $E_n \subset E_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
3) объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Лемма 9.1: Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, а $\{E_n\}$ – его исчерпание. Тогда
1) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$.
2) Для всякой $f \in R(E)$ справедливо
$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Доказательство: 1) По определению исчерпания имеется включение
$$E_n \subset E_{n+1} \subset E,$$
которое влечёт неравенство $\mu(E_n) \le \mu(E_{n+1}) \le \mu(E)$, т.е. $\{\mu(E_n)\}$ – – неубывающая и ограниченная сверху последовательность. Следовательно,
$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \le \mu(E).$$

Множество E измеримо, поэтому его граница ∂E измерима по Жордану, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ открытые промежутки $I_1, \dots, I_p$ такие, что их объединение $\mathcal{U} := \bigcup\limits_{i=1}^{p} I_i$ содержит ∂E и $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu(I_i) < \varepsilon$. Множество $\tilde{E} := E \cup \mathcal{U}$ является открытым, более того $\tilde{E} \supset \bar{E}$ и
$$\mu(\tilde{E}) \le \mu(E) + \mu(\mathcal{U}) \le \mu(E) + \varepsilon.$$

Для всех $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множества $\tilde{E}_n := E_n \cup \mathcal{U}_n$, построенные описанным выше способом по $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$. Очевидно, что $E_n \subset \tilde{E}_n$ и
$$\mu(\tilde{E}_n) \le \mu(E_n) + \mu(\mathcal{U}_n) < \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$
По построению
$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{E}_n.$$

Замыкание $\bar{E}$ является компактом, который покрыт системой открытых множеств $\mathcal{U}, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots$. Существует конечное подпокрытие множества $\bar{E}$ вида
$$\mathcal{U}, \tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_k$$
В силу вложений $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_k$, система $\mathcal{U}, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k, E_k$ тоже является покрытием $\bar{E}$. Тогда
$$\mu(E) \le \mu(\bar{E}) \le \mu(E_k) + \mu(\mathcal{U}) + \sum_{i=1}^{k} \mu(\mathcal{U}_i) < \mu(E_k) + 2\varepsilon.$$
Получается, что для всех $n \ge k$ $0 < \mu(E) - \mu(E_n) < 2\varepsilon$. Переходя к пределу по $n \to \infty$, имеем
$$\mu(E) \le \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

2) По критерию Лебега из интегрируемости f на E следует и интегрируемость на подмножестве $E_n \subset E$, $n \in \mathbb{N}$. Из интегрируемости f на E также следует ограниченность на E, т.е. $\exists M > 0$, т.ч. $|f(x)| \le M$ для всех $x \in E$. Следовательно,

$$\left| \int_E f(x)dx - \int_{E_n} f(x)dx \right| = \left| \int_{E \setminus E_n} f(x)dx \right| \le \int_{E\setminus E_n} |f(x)|dx \overset{\substack{\text{следствие 2}\\ \text{теоремы 7.1}}}{\le} M \mu(E \setminus E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{часть 1)}} 0$$ ◄

Определение 9.2: Пусть $\{E_n\}$ — исчерпание множества E, функция $f: E \to \mathbb{R}$ лежит в классе $\mathcal{R}(E_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда, если предел

$$(9.1) \qquad \int_E f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx$$

существует, а его значение не зависит от выбора исчерпания, то $\int_E f(x)dx$ называется **несобственным интегралом функции f по множеству E**.

Пункт 2) леммы 9.1 говорит, что для $f \in \mathcal{R}(E)$ интеграл Римана по E совпадает со сходящимся интегралом в смысле определения 9.2.

Утверждение 9.1: Пусть $f(x) \ge 0$ на E и для некоторого исчерпания $\{E_n\}$ множества E предел (9.1) существует. Тогда несобственный интеграл $\int_E f(x)dx$ сходится.

Доказательство: Рассмотрим другое исчерпание $\{E'_k\}$ множества E, т.ч. $f \in \mathcal{R}(E'_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пересечения $E_n^k := E'_k \cap E_n$, $n \in \mathbb{N}$, образуют исчерпания множества E'_k, поэтому по пункту 2) леммы 9.1

$$\int_{E'_k} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n^k} f(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx = A.$$

Т.к. $f \ge 0$ на , а $E'_k \subset E'_{k+1} \subset E$, то послед-ть $\int_{E'_k} f(x)dx$ неубывающая, а значит существует

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E'_k} f(x)dx = B \le A.$$

Теперь поменяв исчерпания $\{E_n\}$ и $\{E'_k\}$ в рассуждении местами, получим $A \le B$. ◄

Пример 9.1: Рассмотрим $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.
Функция $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, а для $E_n := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < n^2\}$ имеем

$$\iint_{E_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n e^{-r^2} r\,dr = 2\pi\left(1 - e^{-n^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi.$$

Поэтому в силу утверждения 9.1 интеграл $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$.
Исчерпывая плоскость $\mathbb{R}^2$ квадратами $E'_n := (-n; n) \times (-n; n)$, получим, т.к. по т. Фубини

$$\iint_{E'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{-n}^{n} dx \int_{-n}^{n} e^{-(x^2+y^2)}dy = \left(\int_{-n}^{n} e^{-t^2}dt\right)^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$ ◄

Утверждение 9.2: (мажорантный признак сходимости)

Пусть $f, g: E \to \mathbb{R}$ – функции, интегрируемые на одних и тех же измеримых подмножествах мн-ва E, т.ч. $|f(x)| \leq g(x)$ для всех $x \in E$. Тогда, если $\int_E g(x)dx$ сходится, то сходятся и интегралы $\int_E |f(x)|dx$ и $\int_E f(x)dx$.

Доказательство: Рассмотрим произвольное исчерпание $\{E_n\}$ множества E, т.ч. $f, g \in R(E_n)$. По теореме 7.3 модуль $|f(x)|$ интегрируем на E_n, для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому мы можем оценить

$$\int_{E_{n+k}} |f(x)|dx - \int_{E_n} |f(x)|dx = \int_{E_{n+k} \setminus E_n} |f(x)|dx \overset{\text{усл. теоремы}}{\leq} \int_{E_{n+k} \setminus E_n} g(x)dx = \int_{E_{n+k}} g(x)dx - \int_{E_n} g(x)dx$$

последняя разность может быть сделана меньше любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n и любых $k \in \mathbb{N}$ по критерию Коши, поскольку последовательность $\int_{E_n} g(x)dx$ сходится. Но тогда сходится и последовательность $\int_{E_n} f(x)dx$, т.е. сходится $\int_E |f(x)|dx$.

Рассмотрим две функции $f_+(x) := \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$ и $f_-(x) := \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$. Очевидно, что $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$ и $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$. Но тогда по доказанному интегралы $\int_E f_-(x)dx$ и $\int_E f_+(x)dx$ сходятся. Значит и интеграл

$$\int_E f(x)dx \left[= \int_E (f_+(x) - f_-(x))dx = \int_E f_+(x)dx - \int_E f_-(x)dx\right]$$

сходится. ◀

Пример 9.2: Рассмотрим функцию $\frac{1}{r^\alpha} = \frac{1}{d^\alpha(0,x)}$, где $d(0,x) = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^m)^2}$ – расстояние между началом координат и точкой x, ограниченную на проколотый единичный шар $\mathring{B} := B(0,1) \subset \mathbb{R}^m$. Будем исследовать интеграл

$$\int_{\mathring{B}} \frac{dx}{r^\alpha(x)}$$

на сходимость.

Рассмотрим исчерпание $B_n := \{x \in B(0,1) : \frac{1}{n} < d(0,x) < 1\}$. Переходя к сферическим координатам

$$\begin{aligned}
x^1 &= \rho \cos\varphi_1, \\
x^2 &= \rho \sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\
&\ldots \\
x^{m-1} &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-1} \cos\varphi_{m-1} \\
x^m &= \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-1} \sin\varphi_{m-1},
\end{aligned}$$

(якобиан перехода равен $\rho^{m-1} \underbrace{\sin^{m-2}\varphi_1 \sin^{m-3}\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{m-2}}_{:= f(\varphi)}$)

получим

$$\int_{B_n} \frac{dx}{r^\alpha(x)} = \int_S f(\varphi)d\varphi \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{r^{m-1}dr}{r^\alpha} = Const \cdot \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dr}{r^{\alpha-m+1}}$$

предел по $n \to \infty$ будет существовать $\Leftrightarrow$ $\alpha - m + 1 < 1$, т.е. когда $\alpha < m$. ◀

Пример 9.3: Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ при $n-1 \le x < n$, $n \in N$, и несобственный интеграл от неё на бесконечном промежутке

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} -$$

– условно сходящийся числовой ряд. Согласно теореме Римана перестановкой его членов можно получить ряд, имеющий любую сумму, даже $+\infty$. Рассмотрим частичную сумму такого ряда

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{n_i-1}^{n_i} \frac{(-1)^{n_i-1}}{n_i}\,dx = \int_{E_n} f(x)\,dx, \quad \text{где } E_n := \bigcup_{i=1}^{n} (n_i-1, n_i)$$

дают исчерпание множества $(0;+\infty)$. Таким образом, одномерный несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, который сходится, но расходится в смысле определения 9.2. ◀