Контрольная работа
Вариант 0

① Докажите, что интеграл
$$F(\alpha) = \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$$
сходится равномерно на $A_1 = [-1; \frac{2}{3}]$ и сходится неравномерно на $A_2 = [-1; 1)$.

Решение: Рассмотрим для $1<b<2$ остаток
$$0 < \int_1^b \frac{dx}{(x-1)^\alpha} = \frac{(x-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{(b-1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \overset{(*)}{<} \frac{(b-1)^{1-\frac{2}{3}}}{1-\frac{2}{3}} = 3\,(b-1)^{1/3} \xrightarrow[b\to 1+0]{} 0,$$
где оценка $(*)$ справедлива для $\alpha \in [-1; \frac{2}{3}]$. То есть получается, что
$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0, \text{ т.ч. } \forall b\in(1; 1+\delta) \text{ и } \forall \alpha\in[-1;\tfrac{2}{3}]\ \left(0<\int_1^b \frac{dx}{(x-1)^\alpha} < \varepsilon\right).$$
Это и есть условие равномерной сходимости на A_1.

При $\alpha = 1$ интеграл
$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \ln(x-1)\Big|_1^2 = +\infty,$$
т.е. расходится. Поскольку точка $\alpha=1$ является предельной для множества $A_2 = [-1;1)$, интеграл не сходится равномерно на этом множестве. ◀

② Вычислите интеграл
$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx.$$

Решение: С помощью формулы интегрирования по частям
$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx = \int_0^{+\infty} (x-\sin x)\, d\left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\frac{x-\sin x}{2x^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$
Рассмотрим интеграл с параметром
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx, \quad \text{т.ч.} \quad I(1) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$
Заметим, что интеграл
$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$$
является интегралом Дирихле, про него известно, что он сходится равномерно на любом отрезке $[a,b]$, не содержащем точку 0, в частности на отрезке $[\delta; \frac{3}{2}]$, где $0<\delta<\frac{3}{2}$.

Следовательно, на $[\delta; \frac{3}{2}]$ имеем $I'(\alpha) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\alpha + C$. При этом
$$\lim_{\alpha\to+0} I(\alpha) = I(0) = 0$$
(т.к. интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на $[0; \frac{3}{2}]$, он является непрерывной функцией на $[0; \frac{3}{2}]$), тогда $C = 0$. Исходный интеграл
$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\,dx = \frac{1}{2} I(1) = \frac{\pi}{4}.$$ ◀

③ С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx, \quad \beta>0.$$

Решение: Формально продифференцируем

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x}\right) dx = -\int_0^{+\infty} (1-\cos\alpha x) e^{-\beta x} dx =$$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx + \int_0^{+\infty} \cos\alpha x\, e^{-\beta x} dx = -\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha\sin\alpha x - \beta\cos\alpha x}{\alpha^2+\beta^2} e^{-\beta x}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Тогда $I(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\beta^2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha^2+\beta^2) + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) + C$. Очевидно, что $\lim\limits_{\beta\to+\infty} I(\beta) = 0 \Rightarrow C=0$.

Итак, формальное дифференцирование даёт

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right).$$

Исходный интеграл сходится при $\beta>0$. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x}\right) dx = -\int_0^{+\infty} (1-\cos\alpha x) e^{-\beta x} dx$$

сходится равномерно на $[\delta;+\infty)$ для любого $\delta>0$. При этом функции

$$\frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x}, \quad (1-\cos\alpha x) e^{-\beta x}$$

непрерывны на $(0;+\infty)_x \times [\delta;+\infty)$. Поэтому формула дифференцирования

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x}\right) dx$$

справедлива для всех $\beta \in [\delta;+\infty)$, где $\delta>0$ – любое, т.е. для всех $\beta>0$. Поэтому

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right), \quad \beta>0.$$

◄

④ С помощью интегралов Эйлера вычислить

$$\int_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}\, dx$$

Решение: Сделаем в интеграле замену $t = x-1$:

$$\int_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}\, dx = \int_0^1 \sqrt[3]{(1-t)^2 t}\, dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{3}} (1-t)^{\frac{2}{3}} dt =$$

$$= \int_0^1 t^{1-\frac{2}{3}} (1-t)^{1-\frac{1}{3}} dt = B\left(\tfrac{2}{3};\tfrac{1}{3}\right) = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

◄