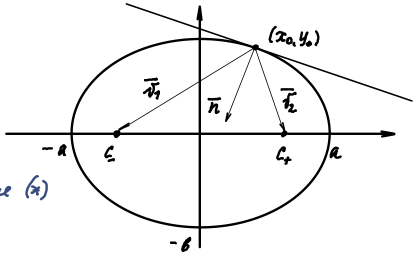
Задача. Доказать, что луч, выпущенный из фокуса эллипса, отражаясь от эллипса, приходит в другой фокус эллипса.

Доказательство: Рассмотрим эллипс с каноническим уравнением

$$(*) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$



его фокусы — точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Возьмем точку (x_0,y_0) на эллипсе, разрешив уравнение $(*)$ относительно y:

$$y(x)=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

и найдя производную $y'(x)=\dfrac{\mp\frac{bx}{a^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$, мы можем выписать уравнение прямой

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

касательной к эллипсу в точке (x_0,y_0). Тогда $\bar n=\left(-\frac{x_0}{a^2},-\frac{y_0}{b^2}\right)$ — внутренняя нормаль к эллипсу в точке (x_0,y_0).

Нам требуется доказать, что углы $\bar v_1\hat{}\,\bar n$ и $\bar v_2\hat{}\,\bar n$ совпадают, где $\bar v_1$ и $\bar v_2$ — это векторы, выходящие из точки (x_0,y_0) в фокус F_1 и F_2, соответственно. Указанные вектора имеют координаты $\bar v_1=(-c-x_0,-y_0)$ и $\bar v_2=(c-x_0,-y_0)$.

Тогда

$$\cos\bar v_1\hat{}\,\bar n=\frac{\langle\bar v_1,\bar n\rangle}{\|\bar v_1\|\cdot\|\bar n\|}=\frac{\left(\frac{x_0}{a^2}\cdot c+1\right)\left(-\frac{x_0}{a^2}c+1\right)}{\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}\cdot\|\bar n\|}=\frac{1-\frac{c^2x_0^2}{a^4}}{\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}\sqrt{\left(1-\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}\cdot\|\bar n\|}$$

$$\cos\bar v_2\hat{}\,\bar n=\frac{\langle\bar v_2,\bar n\rangle}{\|\bar v_2\|\cdot\|\bar n\|}=\frac{\left(-\frac{x_0}{a^2}\cdot c+1\right)\left(\frac{x_0}{a^2}c+1\right)}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}\cdot\|\bar n\|}=\frac{1-\frac{c^2x_0^2}{a^4}}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}\sqrt{\left(1+\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}\cdot\|\bar n\|}$$

Рассмотрим знаменатель выражения $(\cos\bar v_1\hat{}\,\bar n)\|\bar n\|$ с учётом $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ и $c^2=a^2-b^2$:

$$\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}\sqrt{\left(1-\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}=\sqrt{\left\{(x_0+c)\left(1-\frac{x_0}{a^2}c\right)\right\}^2+y_0^2\left(1-\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}=\sqrt{\left(x_0+c-\frac{x_0^2}{a^2}c-\frac{x_0}{a^2}c^2\right)^2+y_0^2\left(1-\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(x_0+c-\frac{x_0^2}{a^2}\cdot c-x_0+x_0\frac{b^2}{a^2}\right)^2+y_0^2\left(1-\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}=\sqrt{\left(c\cdot\frac{y_0^2}{b^2}+x_0\frac{b^2}{a^2}\right)^2+y_0^2\left(1-\frac{x_0}{a^2}\cdot c\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{b^4}y_0^4+2cx_0\frac{y_0^2}{a^2}+x_0^2\frac{b^4}{a^4}+y_0^2-\frac{2cx_0y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{b^4}y_0^4+x_0^2\frac{b^4}{a^4}+y_0^2+\frac{x_0^2c^2}{a^2}}.$$

Аналогично для знаменателя $(\cos\bar v_2\hat{}\,\bar n)\|\bar n\|$ имеем

$$\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}\sqrt{\left(1+\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}=\sqrt{\left\{(x_0-c)\left(1+\frac{x_0}{a^2}c\right)\right\}^2+y_0^2\left(1+\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}=\sqrt{\left(x_0-c+\frac{x_0^2}{a^2}c-\frac{x_0}{a^2}c^2\right)^2+y_0^2\left(1+\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(x_0-c+\frac{x_0^2}{a^2}\cdot c-x_0+x_0\frac{b^2}{a^2}\right)^2+y_0^2\left(1+\frac{x_0}{a^2}c\right)^2}=\sqrt{\left(-c\cdot\frac{y_0^2}{b^2}+x_0\frac{b^2}{a^2}\right)^2+y_0^2\left(1+\frac{x_0}{a^2}\cdot c\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2}{b^4}y_0^4-2cx_0\frac{y_0^2}{a^2}+x_0^2\frac{b^4}{a^4}+y_0^2+\frac{2cx_0y_0^2}{a^2}+\frac{x_0^2c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{c^2}{b^4}y_0^4+x_0^2\frac{b^4}{a^4}+y_0^2+\frac{x_0^2c^2}{a^2}}$$

Таким образом, $\cos\bar v_1\hat{}\,\bar n=\cos\bar v_2\hat{}\,\bar n$, поскольку углы острые, то $\bar v_1\hat{}\,\bar n=\bar v_2\hat{}\,\bar n$. ◀