Докажем, что $f(x) = \operatorname{arctg} x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$

► Заметим, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R > 0, \text{ т. ч. } \forall x \geqslant R\ \left(\left| \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \right.$$

Значит, для $x_1, x_2 \geqslant R$ справедлива

$$\left| \operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 \right| = \left| \left(\operatorname{arctg} x_1 - \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x_2 \right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \operatorname{arctg} x_1 - \frac{\pi}{2} \right| + \left| \operatorname{arctg} x_2 - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Для $\varepsilon > 0$ представим $[a; +\infty) = [a; R] \cup [R; +\infty)$.

По теореме Кантора $\operatorname{arctg} x$ равномерно непрерывна на $[a; R]$

Следовательно, $\exists \delta > 0$, т.ч $\forall x_1, x_2 \in [a; R]$: $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется

$$\left| \operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, если $x_1, x_2 \in [a; +\infty)$, то

1) при $x_1, x_2 \in [a; R]$, т.ч. $|x_1 - x_2| < \delta$,

$$\left| \operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon;$$

2) при $x_1, x_2 \in [R; +\infty)$ $\left| \operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon;$

3) при $x_1 \in [a; R]$ и $x_2 \in [R, +\infty)$, т.ч $|x_1 - x_2| < \delta$, имеем

$$\left| \operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 \right| = \left| (\operatorname{arctg} x_1 - R) + (R - \operatorname{arctg} x_2) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \operatorname{arctg} x_1 - R \right| + \left| R - \operatorname{arctg} x_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Таким образом, функция $\operatorname{arctg} x$ равномерна непрерывна на $[a; +\infty)$, где $a \in \mathbb{R}$.

Аналогично можно показать, что функция равномерно непрерывна на полуинтервале $(-\infty; a]$. Но тогда она равномерно и на объединении $(-\infty; a] \cup [a; +\infty) = \mathbb{R}$.