§ 10. Криволинейные интегралы

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Криволинейные интегралы первого рода. Пусть спрямляемая кривая Γ задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S, \tag{1}$$

где s — переменная длина дуги этой кривой. Тогда, если на кривой Γ определена функция F, то число

$$\int_0^S F(\mathbf{r}(s))\, ds$$

называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции F по кривой Γ и обозначают

$$\int_\Gamma F(x;y;z)\, ds \quad \text{или, короче,} \quad \int_\Gamma F\, ds.$$

Таким образом, по определению

$$\int_\Gamma F(x;y;z)\, dx = \int_0^S F(x(s);y(s);z(s))\, ds. \tag{2}$$

Интеграл (2) существует, если функция F непрерывна на кривой Γ.

Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1) Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

2) Если кривая Γ есть объединение конечного числа кривых $\Gamma_1, \ldots$ $\ldots, \Gamma_k$, а функция F непрерывна на Γ, то

$$\int_\Gamma F(x;y;z)\, dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F(x;y;z)\, ds. \tag{3}$$

3) Если гладкая кривая Γ задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{4}$$

а функция F непрерывна на кривой Γ, то

$$\int_\Gamma F(x;y;z)\, ds = \int_\alpha^\beta F(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt. \tag{5}$$

Если Γ — гладкая плоская кривая, заданная уравнением

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{6}$$

то

$$\int_\Gamma F(x;y)\, dx = \int_a^b F(x;f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{7}$$

Аналогично, если гладкая плоская кривая Γ задана уравнением

$$x = \varphi(y), \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

то

$$\int_{\Gamma} F(x;y)\,dx = \int_{c}^{d} F(\varphi(y);y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy. \tag{8}$$

2. Криволинейные интегралы второго рода. Пусть гладкая кривая Γ задана уравнением (1). Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) \tag{9}$$

— единичный вектор касательной к этой кривой. Здесь α, β, γ — углы, образованные касательной с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Пусть на кривой Γ определена вектор-функция $\mathbf{F} = (P; Q; R)$ такая, что для скалярной функции

$$F_\tau = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + P\cos\gamma$$

существует $\int\limits_{\Gamma} F_\tau\,ds$. Тогда число

$$\int_{\Gamma} F_\tau\,ds = \int_{\Gamma} (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau})\,ds \tag{10}$$

называют *криволинейным интегралом второго рода* от функции $\mathbf{F}$ по кривой Γ и обозначают

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Таким образом, по определению

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{0}^{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds, \tag{11}$$

где $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ — единичный вектор касательной к кривой Γ.

Формулу (11) можно записать в векторной форме:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int_{0}^{S} (\mathbf{F}(\mathbf{r}(s)), \boldsymbol{\tau}(s))\,ds, \tag{12}$$

где $d\mathbf{r} = (dx; dy; dz)$.

Если $Q = R = 0$, то формулу (11) записывают в виде

$$\int_{\Gamma} P\,dx = \int_{0}^{S} P(x(s); y(s); z(s))\cos\alpha(s)\,ds. \tag{13}$$

Аналогично,

$$\int_{\Gamma} Q\,dy = \int_{0}^{S} Q\cos\beta\,ds, \qquad \int_{\Gamma} R\,dz = \int_{0}^{S} R\cos\gamma\,ds. \tag{14}$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) При изменении ориентации кривой на противоположную криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

2) Если гладкая кривая Γ задана уравнением (4), а вектор-функция $\mathbf{F} = (P; Q; R)$ непрерывна на Γ, то

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}, \mathbf{r}'(t))\, dt, \tag{15}$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t); y(t); z(t))x'(t) + \\ + Q(x(t); y(t); z(t))y'(t) + R(x(t); y(t); z(t))z'(t)]\, dt. \tag{16}$$

В случае, когда Γ — плоская гладкая кривая, заданная уравнением (6), из формулы (16) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} P(x; y)\, dx = \int\limits_{a}^{b} P(x; f(x))\, dx, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x; y)\, dy = \int\limits_{a}^{b} Q(x; f(x)) f'(x)\, dx. \tag{18}$$

3. Формула Грина. Пусть граница Γ плоской ограниченной области G состоит из конечного набора кусочно гладких кривых. Тогда, если функции P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{G}$, то справедлива *формула Грина*

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy, \tag{19}$$

где контур Γ ориентирован так, что при его обходе область G остается слева.

Из формулы (19) при $Q = x$, $P = -y$ получаем

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} x\, dy - y\, dx, \tag{20}$$

где $S = \iint\limits_{G} dx\, dy$ — площадь области G, ограниченной контуром Γ (при обходе контура Γ область G остается слева).

4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Если функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ непрерывны в плоской области G, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P\, dx + Q\, dy \tag{21}$$

не зависит от пути интегрирования Γ_{AB} (кривая Γ_{AB} лежит в области G, A — ее начало, B — конец) тогда и только тогда, когда выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$, т. е. в области G выполняется условие

$$du = P\,dx + Q\,dy \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q. \tag{22}$$

При этом

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A). \tag{23}$$

Здесь

$$u(x;y) = \int\limits_{\Gamma_{M_0M}} P\,dx + Q\,dy, \tag{24}$$

где Γ_{M_0M} — некоторая кривая с началом в фиксированной точке $M_0(x_0;y_0)$ и концом в точке $M(x;y)$, лежащая в области G.

Пусть функции P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в плоской области G. Тогда для того чтобы криволинейный интеграл (21) не зависел от пути интегрирования, необходимо, а в случае, когда G — односвязная область, то и достаточно, чтобы в области G выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{25}$$

5. Некоторые приложения криволинейных интегралов. Пусть на кусочно гладкой кривой Γ распределена масса с линейной плоскостью $\rho(x;y;z)$ (или $\rho(x;y)$ для плоской кривой).

Массу кривой вычисляют по формуле

$$m = \int\limits_{\Gamma} \rho(x;y;z)\,ds, \tag{26}$$

координаты центра масс — по формулам

$$x_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma} x\rho\,ds, \quad y_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma} y\rho\,ds, \quad z_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma} z\rho\,ds, \tag{27}$$

моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz — по формулам

$$I_x = \int\limits_{\Gamma} (y^2+z^2)\rho\,ds, \quad I_y = \int\limits_{\Gamma} (z^2+x^2)\rho\,ds, \quad I_z = \int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)\rho\,ds. \tag{28}$$

Пусть на области Ω задана вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки из Ω, тогда говорят, что на Ω задано *векторное* (*силовое*) *поле*. Пусть Γ — кусочно гладкая ориентированная кривая в Q и векторное поле $\mathbf{F}$ непрерывно на Γ.

Работой поля $\mathbf{F}$ вдоль Γ называют интеграл

$$A = \int\limits_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}. \tag{29}$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл
$$I = \int\limits_{\Gamma} (x+y)\,ds,$$
где Γ — граница треугольника (рис. 10.1) с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$.

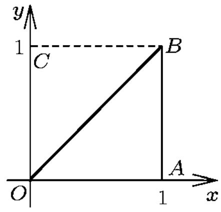

Рис. 10.1

▲ Пусть I_1, I_2, I_3 — криволинейные интегралы от функции $x+y$ по отрезкам AB, BO и OA соответственно. Так как отрезок AB задается уравнением $x=1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то по формуле (8) получаем
$$I_1 = \int\limits_0^1 (y+1)\,dy = \frac{3}{2}.$$
Отрезки BO и OA задаются соответственно уравнениями $y=x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. По формуле (7) находим
$$I_2 = \int\limits_0^1 2x\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}, \quad I_3 = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

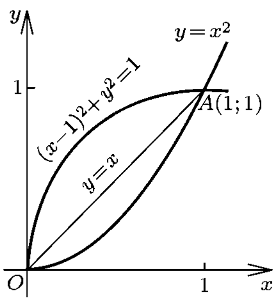

Рис. 10.2

Следовательно, $I = I_1 + I_2 + I_3 = 2 + \sqrt{2}$. ▲

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл
$$I = \int\limits_{\Gamma} y\,dx + x\,dy$$
по кривой Γ с началом $O(0;0)$ и концом $A(1;1)$, если (рис. 10.2):

1) Γ — отрезок OA;

2) Γ — дуга параболы $y=x^2$;

3) Γ — дуга окружности радиуса 1 с центром в точке $(1;0)$.

▲ 1) Так как отрезок OA задается уравнением $y=x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, то, применяя формулы (17) и (18), находим
$$I = \int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_0^1 x\,dx = 1.$$
2) Если Γ — дуга параболы, то
$$\int\limits_{\Gamma} y\,dx = \int\limits_0^1 x^2\,dx, \quad \int\limits_{\Gamma} x\,dy = \int\limits_0^1 2x^2\,dx, \quad I = \int\limits_0^1 3x^2\,dx = 1.$$
3) Так как уравнение дуги окружности можно записать в виде
$$x = 1+\cos t, \quad y = \sin t,$$

где t меняется от π до $\pi/2$, то по формуле (16) получаем

$$I = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \sin t(-\sin t)\,dt + \int\limits_{\pi}^{\pi/2} (1+\cos t)\cos t\,dt = \\ = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} (\cos t + \cos 2t)\,dt = 1. \ \blacktriangle$$

Пример 3. Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{G} x^2 y\,dx - xy^2\,dy,$$

где Γ — окружность $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

▲ Воспользуемся формулой (19), где

$$P = x^2 y, \quad Q = -xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2.$$

Тогда

$$I = -\iint\limits_{D} (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

где D — круг радиуса R с центром в точке $(0;0)$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$I = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3\,dr = -\frac{\pi R^4}{2}. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Пользуясь формулой (20), найти площадь S, ограниченную астроидой

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

▲ Применяя формулы (20) и (16), получаем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt = \frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} (\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)\,dt = \\ = \frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \ \blacktriangle$$

Пример 5. Показать, что криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AB} (3x^2 y + y)\,dx + (x^3 + x)\,dy,$$

где $A(1;-2)$, $b(2;3)$, не зависит от пути интегрирования, и вычислить этот интеграл.

▲ Так как функции $P = 3x^2y + y$, $Q = x^3 + x$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ непрерывны в R^2 и выполняется условие (25), то интеграл не зависит от пути интегрирования и выражается формулой (23).

Функцию $u(x; y)$ можно найти по формуле (24). Заметим, однако, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, так как

$$(3x^2 + y)\,dx + (x^3 + x)\,dy = (3x^2y\,dx + x^3\,dy) + (y\,dx + x\,dy) = \\ = d(x^3y) + d(xy) = d(x^3y + xy) = du.$$

Следовательно, $u = x^3y + xy$, и по формуле (23) находим

$$I = u(B) - u(A) = 30 - (-4) = 34. \ ▲$$

ЗАДАЧИ

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой Γ:

1) $\int\limits_{\Gamma} ds$, Γ — отрезок с концами $(0; 0)$ и $(1; 2)$;

2) $\int\limits_{\Gamma} (2x + y)\,ds$, Γ — ломаная $ABOA$, где $A(1; 0)$, $B(0; 2)$, $O(0; 0)$;

3) $\int\limits_{G} (x + y)\,ds$, Γ — граница треугольника с вершинами $(0; 0)$; $(1; 0)$ и $(0; 1)$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{ds}{y - x}$, Γ — отрезок с концами $(0; -2)$ и $(4; 0)$;

5) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, Γ — отрезок с концами $(0; 0)$ и $(1; 2)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds$, если:

1) Γ — граница квадрата с вершинами $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$;

2) Γ — четверть эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, лежащая в I квадранте;

3) Γ — граница прямоугольника с вершинами $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 2)$, $(0; 2)$.

3. Пусть Γ — гладкая кривая, заданная в полярных координатах $(r; \varphi)$ уравнением $r = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, а функция $F(x; y)$ непрерывна на Γ. Доказать, что

$$\int\limits_{\Gamma} F(x; y)\,ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\rho(\varphi)\cos\varphi; \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \quad (30)$$

Вычислить криволинейный интеграл по плоской кривой Γ (4–11).

4. $\int\limits_\Gamma x^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=a^2$, $y\geqslant 0$.

5. $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)^n\,ds$, Γ — окружность $x^2+y^2=a^2$.

6. $\int\limits_\Gamma f(x,y)\,dx$, Γ — окружность $x^2+y^2=ax$, если:

1) $f(x;y)=x-y$; 2) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

7. $\int\limits_\Gamma f(x;y)\,ds$, Γ — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=a^2\cos 2\varphi$, если:

1) $f(x;y)=x+y$; 2) $f(x;y)=x\sqrt{x^2-y^2}$.

8. $\int\limits_\Gamma |y|\,ds$, Γ — лемниската $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

9. $\int\limits_\Gamma (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, Γ — астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

10. $\int\limits_\Gamma f(x;y)\,ds$, Γ — арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, если:

1) $f(x;y)=y$; 2) $f(x;y)=y^2$.

11. $\int\limits_\Gamma f(x;y)\,ds$, Γ — дуга развертки окружности

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

если:

1) $f(x;y)=x^2+y^2$; 2) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Вычислить криволинейный интеграл по пространственной кривой Γ (12–18).

12. $\int\limits_\Gamma f(x;y;z)\,ds$, Γ — первый виток винтовой линии

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,$$

если:

1) $f(x;y;z)=z^2/(x^2+y^2)$; 2) $f(x;y;z)=1/(x^2+y^2+z^2)$;
3) $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2$.

13. $\int\limits_\Gamma f(x;y;z)\,ds$, Γ — дуга конической винтовой линии

$$x=t\cos t,\quad y=t\sin t,\quad z=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

если:

1) $f(x;y;z)=z$; 2) $f(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2}+z$.

14. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{2y^2+z^2}\, ds$, Γ — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.

15. $\int\limits_{\Gamma} xyz\, ds$, Γ — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$, расположенная в I октанте.

16. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)\, ds$, Γ — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=$ $=x$, расположенная в I октанте.

17. $\int\limits_{\Gamma} x^2\, ds$, Γ — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

18. $\int\limits_{\Gamma} z\, ds$, Γ — дуга кривой $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ от точки $(0;0;0)$ до точки $(a;a;a\sqrt{2})$, $a>0$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по кривой Γ, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра x (19, 20).

19. 1) $\int\limits_{\Gamma} xy\, dx$, Γ — дуга синусоиды $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant \pi$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \left(x-\frac{1}{y}\right) dy$, Γ — дуга параболы $y=x^2$, $1\leqslant x\leqslant 2$;

3) $\int\limits_{\Gamma} x\, dy - y\, dx$, Γ — кривая $y=x^3$, $0\leqslant x\leqslant 2$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \frac{y}{x}\, dx + dy$, Γ — кривая $y=\ln x$, $1\leqslant x\leqslant e$;

5) $\int\limits_{\Gamma} 2xy\, dx + x^2\, dy$, Γ — дуга параболы $y=\frac{x^2}{4}$, $0\leqslant x\leqslant 2$;

6) $\int\limits_{\Gamma} 2xy\, dx - x^2\, dy$, Γ — дуга параболы $y=\sqrt{\frac{x}{2}}$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

20. 1) $\int\limits_{\Gamma} \cos y\, dx - \sin y\, dy$, Γ — отрезок прямой $y=-x$, $-2\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 2$;

2) $\int\limits_{\Gamma} (xy-y^2)\, dx + x\, dy$, Γ — кривая $y=2\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

3) $\int\limits_{\Gamma} (x^2-2xy)\, dx + (y^2-2xy)\, dy$, Γ — дуга параболы $y=x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;

4) $\int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)\, dx + (x^2-y^2)\, dy$, Γ — кривая $y=1-|x-1|$, $0\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 2$.

Вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ, пробегаемой от точки A к точке B (21–25).

21. $\int\limits_\Gamma x\,dy - y\,dx$, $A(0;0)$, $B(1;2)$, если:

1) Γ — отрезок AB; 2) Γ — дуга параболы $y = 2x^2$;
3) Γ — ломаная ACB, где $C(0;1)$.

22. $\int\limits_\Gamma xy\,dx - y^2\,dy$, Γ — дуга параболы $y^2 = 2x$, $A(0;0)$, $B(2;2)$.

23. $\int\limits_\Gamma \frac{3x}{y}\,dx - \frac{2y^3}{x}\,dy$, Γ — дуга параболы $x = y^2$, $A(4;2)$, $B(1;1)$.

24. $\int\limits_\Gamma \frac{x}{y}\,dx - \frac{y-x}{x}\,dy$, Γ — дуга параболы $y = x^2$, $A(2;4)$, $B(1;1)$.

25. $\int\limits_\Gamma x\,dy$, Γ — полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $A(0;-a)$, $B(0;a)$.

26. Вычислить криволинейный интеграл по отрезку AB, ориентированному в направлении от точки A к точке B:

1) $\int\limits_\Gamma x^3\,dy - xy\,dx$, $A(0;-2)$, $B(1;3)$;

2) $\int\limits_\Gamma -3x^2\,dx + y^3\,dy$, $A(0;0)$, $B(2;4)$;

3) $\int\limits_\Gamma (2x - y)\,dx + (4x + 5y)\,dy$, $A(3;-4)$, $B(1;2)$;

4) $\int\limits_\Gamma (4x + 5y)\,dx + (2x - y)\,dy$, $A(1;-9)$, $B(4;-3)$;

5) $\int\limits_\Gamma \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right)dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)dy$, $A(1;0)$, $B(3;4)$;

6) $\int\limits_\Gamma (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$, $A(0;1)$, $B(2;3)$.

Вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра t (27, 28).

27. 1) $\int\limits_\Gamma xy^2\,dx$, Γ — дуга окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$;

2) $\int\limits_\Gamma x\,dy + y\,dx$, Γ — дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$;

3) $\int\limits_{\Gamma} y\,dx - x\,dy$, Γ — эллипс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

4) $\int\limits_{\Gamma} y^2\,dx + x^2\,dy$, Γ — верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

28. 1) $\int\limits_{\Gamma} (2a - y)\,dx + (y - a)\,dy$, Γ — дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, Γ — дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (29, 30).

29. 1) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\,dx$, Γ — граница прямоугольника, образованного прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$, $y = 5$;

2) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 - 2xy)\,dx + (x - 2y)^2\,dy$, Γ — граница прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$;

3) $\int\limits_{\Gamma} (3x^2 - y)\,dx + (1 - 2x)\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$;

4) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$.

30. 1) $\int\limits_{\Gamma} 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(1;1)$, $(1;3)$, $(2;2)$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, Γ — граница квадрата с вершинами $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$;

3) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{(x + y)\,dx + (y - x)\,dy}{x^2 + y^2}$, Γ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{xy^2\,dx - x^2y\,dy}{x^2 + y^2}$, Γ — правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой Γ, пробегаемой в направлении возрастания параметра t (31–36).

31. $\int\limits_{\Gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, Γ — виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. $\int\limits_{\Gamma} (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$, Γ — кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

33. $\int\limits_{\Gamma} yz\,dx + z\sqrt{a^2 - y^2}\,dy + xy\,dz$, Γ — дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at/(2\pi)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

34. $\int\limits_{\Gamma} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, Γ — кривая $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

35. $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, Γ — кривая $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

36. $\int\limits_{\Gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, Γ — окружность $x = a\cos\alpha\cos t$, $y = a\cos\alpha\sin t$, $z = a\sin\alpha$ ($\alpha = \mathrm{const}$).

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой Γ (37–44).

37. $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$, Γ — отрезок AB, пробегаемый от точки $A(1;1;1)$ к точке $B(2;3;4)$.

38. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, Γ — отрезок AB, пробегаемый от точки $A(1;1;1)$ к точке $B(4;4;4)$.

39. $\int\limits_{\Gamma} x(z-y)\,dx + y(x-z)\,dy + z(y-x)\,dz$, Γ — ломаная $ABCA$, где $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$.

40. $\int\limits_{\Gamma} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, Γ — линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ ($R > 0$, $z \geqslant 0$), пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0;0;0)$.

41. $\int\limits_{\Gamma} (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$), пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Ox.

42. $\int\limits_{\Gamma} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, Γ — граница части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (лежащей в I октанте), пробегаемая по ходу часовой стрелки, если смотреть из точки $(0;0;0)$.

43. $\int\limits_{\Gamma} (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oy.

44. $\int\limits_{\Gamma} (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, Γ — линия пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad x^2 + y^2 = 2rx, \quad 0 < r < R, \quad z \geqslant 0,$$

пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oz.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (45–55).

45. $\int\limits_{\Gamma} (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, если:

1) Γ — эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; 2) Γ — окружность $x^2 + y^2 = ax$.

46. $\int\limits_{\Gamma} (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, Γ — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

47. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x\,dy + y\,dx}{x^2 + y^2}$, Γ — окружность $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

48. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)^2\,dx - (x^2 + y^2)\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(1;1)$, $(3;2)$, $(2;5)$.

49. $\int\limits_{\Gamma} (y - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$, Γ — граница кругового сектора $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha \leqslant \pi/2$, где $(r;\varphi)$ — полярные координаты.

50. $\int\limits_{\Gamma} e^x[(1 - \cos y)\,dx + (\sin y - y)\,dy]$, Γ — граница области $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

51. $\int\limits_{\Gamma} e^{y^2 - x^2}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy$, Γ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

52. $\int\limits_{\Gamma} (e^x \sin y - y)\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy$, Γ — граница области $x^2 + y^2 < ax$, $y > 0$.

53. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{dx - dy}{x + y}$, Γ — граница квадрата с вершинами $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$.

54. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}))\, dx$, Γ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

55. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)^2\, dx - (x - y)^2\, dy$, Γ — граница области, образованной отрезком AB, где $A(1;1)$, $B(2;6)$, и дугой параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точки A, B, $O(0;0)$.

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ с началом в точке A и концом в точке B (56–68).

56. $\int\limits_{\Gamma} x\, dy + y\, dx$, $A(-1;3)$, $B(2;2)$.

57. $\int\limits_{\Gamma} x\, dx + y\, dy$, $A(-1;0)$, $B(-3;4)$.

58. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$, $A(2;-1)$, $B(1;0)$.

59. $\int\limits_{\Gamma} 2xy\, dx + x^2\, dy$, $A(0;0)$, $B(-2;-1)$.

60. $\int\limits_{\Gamma} (x^4 + 4xy^3)\, dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\, dy$, $A(-2;-1)$, $B(0;3)$.

61. $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + 2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy - y^2)\, dy$, $A(3;0)$, $A(0;-3)$.

62. $\int\limits_{\Gamma} (3x^2 - 2xy + y^2)\, dx + (2xy - x^2 - 3y^2)\, dy$, $A(-1;2)$, $B(1;-2)$.

63. $\int\limits_{\Gamma} f(x + y)(dx + dy)$, $f(t)$ — непрерывная функция, $A(0;0)$, $B(x_0;y_0)$.

64. $\int\limits_{\Gamma} \varphi(x)\, dx + \psi(y)\, dy$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывные функции, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

65. $\int\limits_{\Gamma} e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy$, $A(0;0)$, $B(x_0;y_0)$.

66. $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz,\ \ A(-1;0;2),\ B(0;1;-2).$

67. $\int\limits_{\Gamma} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz,\ \ A(2;-1;0),\ B(1;2;3).$

68. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $A \in S_1$, $B \in S_2$, где S_1 — сфера x^2+y^2+ $+z^2 = R_1^2$, S_2 — сфера $x^2+y^2+z^2 = R_2^2$ $(R_1 > 0,\ R_2 > 0)$.

Найти функцию и по заданному полному дифференциалу этой функции (69–77).

69. $du = x^2\,dx + y^2\,dy$.

70. $du = (e^{2y} - 5y^3e^x)\,dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)\,dy$.

71. $du = e^{x-y}\,[(1+x+y)\,dx + (1-x-y)\,dy]$.

72. $du = \dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\dfrac{e^2}{1+x^2} + 1\right)dy.$

73. $du = \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}$. **74.** $du = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1+x^2y^2z^2}$.

75. $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$.

76. $du = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right)dx + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy - \dfrac{xy}{z^2}\,dz.$

77. $du = \dfrac{(x+y-z)\,dx + (x+y-z)\,dy + (x+y+z)\,dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

78. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x;y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} F(x;y)(y\,dx + x\,dy)$$

не зависел от пути интегрирования Γ_{AB}?

79. Исходя из определения длины s спрямляемой кривой $\Gamma =$ $= \{\mathbf{r}(t), a \leqslant t \leqslant b\}$, данного в [1, § 24, п. 2], доказать, что если Γ — кусочно гладкая кривая, то в R^3

$$s = \int\limits_{\Gamma} ds = \int\limits_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right| dt = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt, \tag{31}$$

а в R^2

$$s = \int\limits_{\Gamma} ds = \int\limits_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right| dt = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{32}$$

80. Доказать, что:

1) если плоская кривая Γ — график непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx; \tag{33}$$

2) если плоская кривая Γ задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $a \leqslant \varphi \leqslant b$, где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на $[a; b]$, то
$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\, d\varphi. \tag{34}$$

81. Найти длину дуги плоской кривой *):

1) $ay^2 = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 5a$; 2) $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$;

3) $y = a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$, $0 \leqslant x \leqslant x_0$; 4) $r = a\sin^3(\varphi/3)$;

5) $r = a(1 + \cos\varphi)$; 6) $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

7) $x = \varphi + \sin\varphi$, $y = 1 - \cos\varphi$, $|\varphi| \leqslant \pi$;

8) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a \geqslant b$; 9) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

82. Найти длину дуги пространственной кривой:

1) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;

2) $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$;

3) $x = a(1 + \cos\varphi)$, $y = a(\varphi - \sin\varphi)$, $z = 4a\sin(\varphi/2)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$;

4) $x = t\cos t^2$, $y = t\sin t^2$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2\pi}$;

5) $2px = z^2$, $6p^2 y = z^3$, $0 \leqslant z \leqslant p$;

6) $x^2 - y^2 = 9z^2/8$, $(x + y)^2 = 8(x - y)$ от точки $(0; 0; 0)$ до точки с аппликатой $z_0 = 1/3$.

83. Пусть s_n — длина витка кривой $x = e^{-kt}\cos t$, $y = e^{-kt}\sin t$, $z = e^{-kt}$, $2\pi n \leqslant t \leqslant 2\pi(n+1)t$, $n \in Z$. Найти отношение $s_{n+1} : s_n$.

84. Используя таблицы, найти с погрешностью не более чем 0,1 длину дуги кривой $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = y$.

85. Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x; y)$ по дуге AB плоской кривой Γ, если:

1) Γ — отрезок AB, $A(1; 1)$, $B(2; 3)$; $\rho(x; y) = 2x + y$;

2) Γ — отрезок AB, $A(1; 0)$, $B(4; 6)$; $\rho(x; y) = \sqrt{y + 2}/x$;

3) Γ: $y = x^2/2$, $A(1; 1{,}5)$, $B(2; 2)$; $\rho(x; y) = y/x$;

4) Γ: $y^2 = x$, $A(1; 1)$, $B(4; 2)$; $\rho(x; y) = y$;

5) Γ: $y = 2x^{3/2}/3$, $A(0; 0)$, $B(4; 16/3)$; $\rho = ks$, где s — длина дуги от точки $(0; 0)$.

86. Найти массу всей кривой $y = a\,\mathrm{ch}\,(x/a)$, $x \in R$, с линейной плотностью $\rho = 1/y^2$.

---

*) Задачи о вычислении для дуг кривых их длин, масс, центров масс, моментов инерции сосредоточены в [2, § 7].

87. Найти массу, распределенную с линейной плотностью ρ по плоской кривой Γ:

1) Γ: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$; $\rho = kr$; 2) Γ: $r = a(1+\cos\varphi)$; $\rho = k\sqrt{r}$;

3) Γ: $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; $\rho = y^{3/2}$;

4) Γ: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$; $\rho = \sqrt[3]{y}$;

5) Γ: $x = \ln(1+t^2)$, $y = 2\operatorname{arctg} t - t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $\rho = ye^{-x}$;

6) Γ: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $a > b$; $\rho = y$;

7) Γ: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; $\rho = |xy|$;

8) Γ: $x^2 + y^2 = ax$; $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

88. Найти массу, распределенную с линейной плотностью ρ по пространственной кривой Γ:

1) Γ: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; $\rho = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$;

2) Γ: $x = at$, $y = at^2/2$, $z = at^3/3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; $\rho = \sqrt{2y/a}$;

3) Γ: $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

4) Γ: $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$, $-\infty < t \leqslant 0$; $\rho = kz$;

5) Γ — дуга кривой $y = x^2/\sqrt{2}$, $z = x^3/3$ с началом $A(0;0;0)$ и концом $B(4;8\sqrt{2};64/3)$; $\rho = k\sqrt{x^2+y^2}$;

6) Γ — дуга кривой $y^2 - 4x^2 = 3z^2$, $y^2 = x$, $z \geqslant 0$, с началом $A(0;0;0)$ и концом $B(1/4;1/2;0)$; $\rho = z$;

7) $\Gamma = \{x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x+y+z = a\}$, $\rho = x^2$.

89. Найти координаты центра масс, распределенных по плоской кривой Γ с линейной плотностью $\rho = 1$:

1) Γ: $y = a\operatorname{ch}(x/a)$, $|x| \leqslant a$;

2) Γ: $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

3) Γ — дуга окружности $r = R$, $|\varphi| \leqslant \varphi_0 \leqslant \pi$;

4) Γ — кардиоида $r = a(1+\cos\varphi)$;

5) Γ: $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$, $y \geqslant 0$; 6) Γ: $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$;

7) Γ: $y^2 = x^2/3 + x^3$, $x \geqslant 0$.

90. Найти координаты центра масс, распределенных с линейной плотностью ρ по дуге винтовой линии $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = h\varphi/2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, если:

1) $\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$; 2) $\rho = \rho_0 e^{-z/h}$, считать $\varphi_0 = 2\pi n$, $n \in N$.

91. Найти координаты центра масс однородной кривой

$$x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\sin t, \quad z = e^{-t}, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

92. Найти координаты центра масс однородного края поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \sqrt{a}$.

93. Пусть кусочно гладкая кривая Γ является объединением гладких кривых Γ_i, $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\Gamma_i$, с массами m_i и радиус-векторами центров масс $\mathbf{r}_i$, $i = 1, ..., n$. Пусть m — масса Г, r_C — центр масс Г. Доказать, что

$$\mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{m} \mathbf{r}_i. \tag{35}$$

94. Найти момент инерции I_x окружности $x^2 + y^2 = R^2$; $\rho = 1$.

95. Найти момент инерции I_y окружности $x^2 + y^2 = 2Rx$; $\rho = 1$.

96. Найти моменты инерции I_x и I_y одной арки циклоиды

$$x = a(t + \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad |t| \leqslant \pi, \quad \rho = 1.$$

97. Найти моменты инерции I_x, I_y, I_z одного витка винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ht/2\pi, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi; \quad \rho = 1.$$

98. Найти момент инерции I_x окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$; $\rho = 1$.

99. Найти полярный момент инерции $I_0 = \int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\, ds$ плоской однородной кривой Г ($\rho = 1$) относительно начала координат, если:

1) Г: $|x| + |y| = a$; 2) Г: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;

3) Г: $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

100. Пусть G — ограниченная плоская область с кусочно гладкой границей ∂G, ориентированной так, что область G находится (локально) слева от касательного к ∂G вектора. Доказать, что площадь μG можно вычислять по любой из формул

$$S = \oint\limits_{\partial G} x\, dy = -\oint\limits_{\partial G} y\, dx = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial G} x\, dy - y\, dx. \tag{36}$$

101. Найти площадь области, ограниченной плоскими кривыми:

1) $y^2 = 4 - x$, $x = 4$, $y = 1$; 2) $y = 2x^2$, $x - y + 1 = 0$;

3) $y = 1 - x^2$, $x - y - 1 = 0$; 4) $x = t^2$, $y = t^3$, $x = 1$;

5) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; 6) $x = 12\sin^3 t$, $y = 3\cos^3 t$;

7) $x = a\sin 2\varphi \cos^2\varphi$, $y = a\cos 2\varphi \cos^2\varphi$, $|\varphi| \leqslant \pi/2$.

102. Найти площадь области $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1$, $\quad \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} < \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

103. Найти площадь области, ограниченной кривыми:

1) $(y - x)^2 + x^2 = 1$; 2) $(x + y)^2 = ax$, $y = 0$;

3) $y^2 = x^2 - x^4$; 4) $9y^2 = 4x^3 - x^4$;

5) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geqslant 0$; 6) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$;

7) $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$.

104. Найти площадь области, ограниченной петлей кривой:

1) $x = 3t/(1 + t^3)$, $y = 3t^2/(1 + t^3)$;

2) $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin 2\varphi$, $x \geqslant 0$; 3) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy$.

105. Пусть G — ограниченная область в полуплоскости $y \geqslant 0$ с кусочно гладкой границей ∂G, ориентированной так, что область G расположена (локально) слева от касательного вектора. Пусть Ω — тело, образованное вращением области G вокруг оси Ox. Доказать, что объем $\mu\Omega$ можно вычислять по любой из формул

$$\mu\Omega = -\pi \oint_{\partial G} y^2\,dx = -2\pi \oint_{\partial G} xy\,dy = -\frac{\pi}{2} \oint_{\partial G} 2xy\,dy + y^2\,dx. \tag{37}$$

106. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси Ox области, ограниченной кривыми:

1) $y = \operatorname{sh} x,\ x = 0 > 0,\ y = 0$;

2) $y = 2 - \sin x,\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi$;

3) $y^2 - x^2 = 1,\ |x| = 1$; 4) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$;

5) $x = \sin 2t,\ y = \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

107*). Найти работу поля $\mathbf{F} = (F_0; 0)$, $F_0 = \mathrm{const}$, вдоль дуги параболы $y^2 = 1 - x$ от точки $(1;0)$ до точки $(0;1)$.

108. Найти работу поля $\mathbf{F} = (F_0, 0)$, $F_0 = \mathrm{const}$, вдоль дуги астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, от точки $(a;0)$ до точки $(0;a)$.

109. Найти работу поля $\mathbf{F} = (xy; x + y)$ вдоль дуги AB кривой Γ, где $A(0;0)$, $B(1;1)$, если:

1) Γ: $y = x$; 2) Γ: $y = x^2$.

110. Найти работу поля $\mathbf{F} = (4x - 5y; 2x + y)$ вдоль дуги AB кривой Γ, где $A(1;-9)$, $B(3;-3)$, если:

1) Γ — ломаная APB, где $P(1;-3)$;

2) Γ — ломаная AQB, где $Q(3;-9)$; 3) Γ — отрезок AB.

111. Найти работу поля F вдоль дуги AB кривой Γ, если

1) $\mathbf{F} = (2xy; -y)$; Γ: $y = x^2 - 1$, $A(1;0)$, $B(2;3)$;

2) $\mathbf{F} = (3xy^2; -x - y)$; Γ: $y^2 = x + 1$, $A(0;1)$, $B(3;2)$;

3) $\mathbf{F} = (-y; x)$; Γ: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $A(0;0)$, $B(2\pi a; 0)$;

4) $\mathbf{F} = (y; -2x)$; Γ; $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, $A(1;0)$, $B(-1;0)$;

5) $\mathbf{F} = (0; 2x)$; Γ: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $y \geqslant 0$, $A(a;0)$, $B(-a;0)$.

112. Найти работу поля $\mathbf{F} = (-y; x)$:

1) от точки $A(1;0)$ до точки $B(-1;0)$:

а) вдоль ломаной $AMNB$, где $M(1;1)$; $N(-1;1)$;

б) вдоль верхней полуокружности $x^2 + y^2 = 1$;

в) вдоль ломаной APB, где $P(0;1)$;

2) от точки $(x_0 - R; y_0)$ до точки $(x_0 + R; y_0)$ вдоль:

а) верхней полуокружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $y \geqslant y_0$;

б) нижней полуокружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, $y \leqslant y_0$.

*) Задачи по этой теме включены также в § 12.

113. Найти работу поля $\mathbf{F} = -\mu\mathbf{r}/r^3$, $\mathbf{r} = (x; y)$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mu = \mathrm{const}$:

1) вдоль дуги AB параболы $y = x^2 - 1$, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$;

2) вдоль дуги AB гладкой кривой Γ, не проходящей через начало координат, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

114. Найти работу поля $\mathbf{F} = \dfrac{1}{r^2} \cdot (-y; x)$, $r^2 = x^2 + y^2$, вдоль дуги AB кривой Γ, где $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, если:

1) Γ — ломаная APB, где $P(1; 1)$;

2) Γ — четверть окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

3) Γ — четверть астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

115. Найти работу поля $\mathbf{F} = \dfrac{1}{r^2}(-y; x)$, $r^2 = x^2 + y^2$, вдоль ориентированной против часовой стрелки окружности:

1) $x^2 + y^2 = 1$; 2) $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

116. Найти работу поля $\mathbf{F} = \lambda\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, вдоль дуги OM кривой Γ, где $O(0; 0; 0)$, $M(x_0; y_0; z_0)$, если:

1) Γ — винтовая линия $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$;

2) Γ — отрезок OM.

117. Найти работу поля $\mathbf{F}$ вдоль контура Γ, если:

1) $\mathbf{F} = (yz; zx; xy)$; Γ — ломаная $ABCD$ с вершинами $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 1)$, $C(2; 3; 1)$, $D(2; 3; 4)$;

2) $\mathbf{F} = (x + z; x; -y)$; Γ — замкнутая ломаная $ABCA$ с вершинами $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$;

3) $\mathbf{F} = (xy; yz; xz)$; Γ — замкнутая ломаная $ABCDA$ с вершинами $A(1; 1; -1)$, $B(-1; 1; 1)$, $C(-1; -1; -1)$, $D(1; -1; 1)$;

4) $\mathbf{F} = (x^2/y; y/x; \cos z)$; Γ — виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ от точки $(a; 0; 0)$ до точки $(0; 0; 2\pi b)$;

5) $\mathbf{F} = (y; -z; x)$; Γ — кривая $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2$, $y = x$, ориентированная против часовой стрелки со стороны оси Ox;

6) $\mathbf{F} = (2xy; y^2; -x^2)$; Γ — дуга кривой $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$, $y = x$, от точки $A(a; a; 0)$ до точки $B(a\sqrt{2}; a\sqrt{2}; a)$;

7) $\mathbf{F} = (z; x; y)$; Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = R$, ориентированная против часовой стрелки со стороны оси Oz.

118. Найти работу поля центральных сил $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, где $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, $f(r)$ — непрерывная при $r > 0$ функция, вдоль гладкого контура Γ с началом $A(x_1; y_1; z_1)$ и концом $B(x_2; y_2; z_2)$, не содержащего начала координат.

119. Доказать, исходя из закона взаимодействия точечных масс, что материальная кривая Γ с линейной плотностью $\rho(\xi; \eta; \zeta)$ притягивает массу m, находящуюся в точке $M(x; y; z)$, с силой

$$\mathbf{F} = km \int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{MN}}{|\overline{MN}|^3}\, \rho(\xi; \eta; \zeta)\, dx, \quad N = N(\xi; \eta; \zeta). \tag{38}$$

120. Найти напряженность гравитационного поля, создаваемого однородной материальной прямой с линейной плотностью ρ_0.

121. С какой силой масса M, равномерно распределенная вдоль окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $z = h > 0$, притягивает точечную массу m, помещенную в начало координат.

122. Пусть $(p; v)$ — координаты, определяющие на плоскости Opv состояние одного моля идеального газа (давление и объем). Уравнение состояния одного моля такого газа имеет вид $pv = RT$, где $R = \mathrm{const} > 0$, T — абсолютная температура. При переходе из состояния $(p_1; v_1)$ в состояние $(p_2; v_2)$ по кривой Γ количество получаемого (или отдаваемого) тепла газом определяют по формуле

$$Q = \int_{\Gamma} \frac{c_p}{R}\, p\, dv + \frac{c_v}{R}\, v\, dp, \tag{39}$$

где $c_v = \mathrm{const}$, $c_p = c_v + R$. Кривую, задаваемую уравнением $pv^\gamma = \mathrm{const}$, где $\gamma = c_p/c_v$, называют *адиабатой* (а процесс изменения состояния вдоль этой кривой — *адиабатическим*).

1) Найти тепло, получаемое газом в изотермическом процессе, т. е. вдоль кривой $pv = RT = \mathrm{const}$, при переходе из состояния $(p_1; v_1)$ в состояние $(p_2; v_2)$.

2) Доказать, что в адиабатическом процессе газ не получает и не отдает тепло.

3) Пусть $pv^\gamma = C_1$, $pv^\gamma = C_2$ — две адиабаты, $\Gamma(T)$ — отсекаемый ими отрезок *изотермы* $pv = RT$, $Q(T)$ — количество тепла, получаемое газом на $\Gamma(T)$. Доказать, что для всех изотерм $\dfrac{Q(T)}{T} = \mathrm{const}$.

4) ***Циклом Карно*** называют замкнутый контур, образованный двумя адиабатами и двумя изотермами $pv = RT_1$ и $pv = RT_2$, $T_2 > T_1$. Пусть этот контур ориентирован от точки с наибольшим давлением вдоль изотермы $pv = RT_2$. Пусть Q — полное тепло, полученное газом на цикле Карно, а Q_2 — на изотерме $pv = RT_2$. Доказать, что к. п. д. цикла $\eta = Q/Q_2$ определяется по формуле $\eta = (T_2 - T_1)/T_2$.

123. В установившемся стационарном потоке жидкости плотность и скорость в каждой точке потока не зависят от времени, т. е. $\rho = \rho(x; y)$, $\mathbf{v} = (u(x; y); v(x; y))$.

1) Найти количество жидкости, прошедшей за единицу времени через ограниченную область G с кусочно гладкой границей ∂G;

2) получить уравнение для u и v, предполагая, что в области G жидкость не возникает и не исчезает (т. е. нет ни источников, ни стоков) и что жидкость несжимаема.

124. Найти логарифмический потенциал простого слоя

$$u(x; y) = \oint_{\Gamma} \mu(\xi; \eta) \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds, \tag{40}$$

где Γ — окружность $\xi^2+\eta^2=1$, ориентированная против часовой стрелки, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, если:

1) $\mu(\xi;\eta)=\mu_0=\mathrm{const}$; 2) $\mu(\xi;\eta)=\cos m\varphi,\ m\in N$;

3) $\mu(\xi;\eta)=\sin m\varphi,\ m\in N$.

Здесь φ — полярный угол точки $(\xi;\eta)$.

125. Вычислить интеграл Гаусса

$$I=\oint\limits_{\partial G}\frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{r}\,ds, \tag{41}$$

где ∂G — кусочно гладкая граница области G, $\mathbf{r}=\overline{MN}$, $M(x;y)\in R^2$, $N(\xi;\eta)\in\partial G$, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ∂G, $(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})$ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$, предполагая, что:

1) $M\notin G$; 2) $M\in G$.

126. Вычислить *логарифмический потенциал двойного слоя*

$$u(x;y)=\oint\limits_{\Gamma}\nu(\xi;\eta)\,\frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{r}\,ds, \tag{42}$$

где Γ — окружность $\xi^2+\eta^2=1$, ориентированная против часовой стрелки, $\mathbf{r}=(\xi-x;\eta-y)$, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ, если:

1) $\nu(\xi;\eta)=\cos m\varphi,\ m\in N$; 2) $\nu(\xi;\eta)=\sin m\varphi,\ m\in N$.

Здесь φ — полярный угол точки $(\xi;\eta)$. Рассмотреть случаи $\sqrt{x^2+y^2}>1$ и $\sqrt{x^2+y^2}<1$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $\sqrt5/2$; 2) $3+2\sqrt5$; 3) $1+\sqrt2$; 4) $-\sqrt5\ln2$; 5) $\ln((3+\sqrt5)/2)$.
2. 1) 0; 2) $ab(a^2+ab+b^2)/(3(a+b))$; 3) 24. **4.** $\pi a^3/2$.
5. $2\pi a^{2n+1}$. **6.** 1) $\pi a^2/2$; 2) $2a^2$. **7.** 1) $a^2\sqrt2$; 2) $2a^3\sqrt2/3$.
8. $2a^2(2-\sqrt2)$. **9.** $4a^{7/3}$. **10.** 1) $32a^2/3$; 2) $256a^3/15$.
11. 1) $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$; 2) $((1+4\pi^2)^{3/2}-1)a^2/3$.
12. 1) $8\pi b^2\sqrt{a^2+b^2}/(3a^2)$; 2) $(\sqrt{a^2+b^2}/ab)\,\mathrm{arctg}\,(2\pi b/a)$;
3) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)/3$.
13. 1) $((1+2\pi^2)^{3/2}-1)2\sqrt2/3$; 2) $((1+2\pi^2)^{3/2}-1)4\sqrt2/3$.
14. $2\pi a^2$. **15.** $a^4/6$. **16.** $a^2\sqrt2$. **17.** $2\pi a^3/3$.
18. $(100\sqrt{38}-72-17\ln((25+4\sqrt{38})/17))a^2\sqrt2/512$.
19. 1) π; 2) $(14-3\ln4)/3$; 3) 8; 4) $3/2$; 5) 4; 6) $12/5$.
20. 1) $2\sin2$; 2) $-8/15$; 3) $-14/15$; 4) $4/3$.
21. 1) 0; 2) $2/3$; 3) 2. **22.** $8/15$, **23.** -11. **24.** $(5-\ln8)/3$.
25. $\pi a^2/2$. **26.** 1) $7/12$; 2) 56; 3) 8; 4) 6; 5) $12+\ln5$; 6) 4.
27. 1) $-1/4$; 2) 0; 3) $-2\pi ab$; 4) $-4ab^2/3$.
28. 1) πa^2; 2) $3\pi a^{4/3}/16$.

29. 1) -48; 2) 4; 3) $-1/2$; 4) 0. **30.** 1) $4/3$; 2) 0; 3) -2π; 4) 0.
31. $-\pi a^2$. **32.** $1/35$. **33.** 0. **34.** 0. **35** $-\pi a^2$.
36. $-\pi a^2 \cos^2 \alpha$. **37.** 13. **38.** $3\sqrt{3}$. **39.** a^3. **40.** $-\pi R^3/4$.
41. $\pi a^2 2^{3/2} \sin(\pi/4 - \alpha)$. **42.** -4. **43.** 0. **44.** $2\pi R r^2$.
45. 1) 0; 2) $-\pi a^3/8$. **46.** πab. **47.** 0. **48.** $-140/3$.
49. 0. **50.** $(l - e^{\pi})/5$. **51.** 0. **52.** $\pi a^2/8$. **53.** -4. **54.** $\pi R^4/4$.
55. -2. **56.** 7. **57.** 12. **58.** 1. **59.** -4. **60.** $-1148/5$.
61. 0. **62.** 30. **63.** $\int\limits_0^{x_0+y_0} f(t)\,dt$. **64.** $\int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\,dt + \int\limits_{y_1}^{y_2} \psi(t)\,dt$.
65. $e^{x_0} \cos y_0 - 1$. **66.** $-1/6$. **67.** 6. **68.** $R_2 - R_1$.
69. $u = (x^3 + y^3)/3 + C$. **70.** $u = xe^{2y} - 5y^3 e^x + C$.
71. $u = e^{x-y}(x + y) + C$. **72.** $u = (e^y - 1)/(1 + x^2) + y + C$.
73. $u = \ln|x + y + z| + C$. **74.** $u = \operatorname{arctg}(xyz) + C$.
75. $u = (x^3 + y^3 + z^3)/3 - 2xyz + C$. **76.** $u = x - x/y + xy/z + C$.
77. $u = \ln\sqrt{(x+y)^2 + z^2} + \operatorname{arctg}(z/(x + y)) + C$.
78. $xF'_x(x;y) = yF'_y(x;y)$.
81. 1) $335a/27$; 2) $\ln(1 + \sqrt{2})$; 3) $a \operatorname{sh}(x_0/a)$; 4) $3\pi a/2$; 5) $8a$;
6) $(c^{2\pi} - 1)\sqrt{2}$; 7) 8; 8) $4aE(\pi/2; \sqrt{a^2 - b^2}/a)$; 9) $6a$.
82. 1) 5; 2) $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$; 3) $4\pi a$; 4) $\sqrt{2}\pi(3 + 4\pi)/3$; 5) $7p/6$;
6) $9\sqrt{2}/16$.
83. $e^{-2\pi k}$. **84.** $4\sqrt{2}E(\pi/2; 1/\sqrt{2}) \approx 7{,}6404$.
85. 1) $5\sqrt{5}$; 2) $2\sqrt{10}$; 3) $(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})/6$; 4) $(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/12$;
5) $4(63 - 5\sqrt{5})k/9$.
86. π/a.
87. 1) $k\pi a^2$; 2) $\pi k(2a)^{3/2}$; 3) $3\sqrt{2}\pi a^{5/2}$; 4) $a^{4/3}$; 5) $(\pi^2 - 8\ln 2)/16$;
6) $\dfrac{b^2}{2} + \dfrac{ab}{2\varepsilon} \arcsin\varepsilon$, $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$; 7) $\dfrac{9\pi a^3}{64}$; 8) $2a^2$.
88. 1) $\sqrt{2}\operatorname{arctg} 2\pi$; 2) $\dfrac{3a}{16}\left(\ln\dfrac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} - \dfrac{2}{3}\right)$;
3) $4((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1)/3$; 4) $\sqrt{3}ka^2/2$; 5) $2644k/15$;
6) $1/16$; 7) $2\sqrt{6}\pi a^3/9$.
89. 1) $\left(0; \dfrac{\operatorname{sh} 2 + 2}{4 \operatorname{sh} 1} a\right)$; 2) $\left(\pi a; \dfrac{4a}{3}\right)$; 3) $\left(\dfrac{R \sin\varphi_0}{\varphi_0}; 0\right)$; 4) $\left(\dfrac{4a}{5}; 0\right)$;
5) $\left(0; \dfrac{2a}{5}\right)$; 6) $x_C = y_C = \dfrac{7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)} \cdot \dfrac{a}{16}$; 7) $\left(\dfrac{8}{45}; 0\right)$.
90 1) $((R\sin\varphi_0)/\varphi_0;\ R(1 - \cos\varphi_0)/\varphi_0; (\varphi_0 h)/(4\pi))$;
2) $(R/(1 + 4\pi^2); 2\pi R/(1 + 4\pi^2);\ h(1 - (n + 1)e^{-n})/(1 - e^{-n}))$.
91. $(2/5; 1/5; 1/2)$. **92.** $x_C = y_C = z_C = \dfrac{a}{24}\,\dfrac{7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)}$.
94. πR^3. **95.** $3\pi R^3$. **96.** $I_x = 32a^3/5$, $I_y = 8(\pi^2 - 256/45)a^3$.
97. $I_x = I_y = \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}(3a^2 + 2h^2)/6$, $I_z = \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}\,a^2$.

98. $2\pi a^3/3$. **99.** 1) $8\sqrt{2}a^3/3$; 2) $3a^3$; 3) $2\pi^2(2\pi^2+1)a^3$.
101. 1) $1/3$; 2) $9/8$; 3) $9/2$; 4) $4/5$; 5) πab; 6) $27\pi/2$; 7) $3\pi a^2/8$.
102. $(7\pi+3)ab/12$.
103. 1) π; 2) $a^2/6$; 3) $4/3$; 4) $8\pi/3$; 5) a^2; 6) $5\pi a^2/8$;
7) $(3\sqrt{3}+4\pi)/9\sqrt{3}$.
104. 1) $3/2$; 2) $4a^2/3$; 3) $1/30$.
106. 1) $\pi(\operatorname{sh} 2a-2a)/4$; 2) $9\pi^2$; 3) $8\pi/3$; 4) $32\pi a^3/105$; 5) $\pi^2/2$.
107. $-8/15$. **108.** $-aF_0$. **109.** 1) $4/3$; 2) $17/12$.
110. 1) 22; 2) 106; 3) 64.
111. 1) 0; 2) $113/3$; 3) $-6\pi a^2$; 4) $-3\pi/2$; 5) πab.
112. 1) а) 4; б) π; в) 1; 2) а) $-(\pi R+2y_0)R$; б) $(\pi R-2y_0)R$.
113. 1) и 2) $\mu(1/r_2-1/r_1)$, где $r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2}$, $j=1,2$.
114. 1), 2), 3) $\pi/2$. **115.** 1) 2π; 2) 0.
116. 1) и 2) $\lambda(x_0^2+y_0^2+z_0^2)/2$.
117. 1) 23; 2) $1/2$; 3) $-4/3$; 4) $\sin(2\pi b)-\pi a^2$; 5) $2\pi a^2$;
6) $(2\sqrt{2}-7/3)a^3$; 7) $2\pi R^2/\sqrt{3}$.
118. $\int\limits_{r_1}^{r_2} rf(r)\,dr$, $r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2+z_j^2}$, $j=1,2$.
120. $-\dfrac{2k\rho_0}{x^2+y^2}(x;y;0)$ (прямая совпадает с осью Oz).
121. $(0;0;kMmh/(a^2+h^2)^{3/2})$. **122.** 1) $RT\ln(p_1/p_2)$.
123. 1) $\oint\limits_{\partial G}\rho(x;y)(v(x;y)\,dx-u(x;y)\,dy)$; 2) $\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$.
124. 1) 0 при $r=\sqrt{x^2+y^2}<1$, $-2\pi\mu_0\ln r$ при $r>1$;
2) $\dfrac{\pi}{nr^n}\cos n\varphi$ при $r>1$, $\dfrac{\pi}{n}r^n\cos n\varphi$ при $r<1$ ($(r;\varphi)$ — полярные координаты точки $(x;y)$);
3) $\dfrac{\pi}{nr^n}\sin n\varphi$ при $r>1$, $\dfrac{\pi}{n}r^n\sin n\varphi$ при $r<1$.
125. 1) 0; 2) 2π.
126. 1) $\pi r^n\cos n\varphi$ при $r<1$, $-\pi r^{-n}\cos n\varphi$ при $r>1$ ($(r;\varphi)$ — полярные координаты точки $(x;y)$);
2) $\pi r^n\sin n\varphi$ при $r<1$, $-\pi r^{-n}\sin n\varphi$ при $r>1$.

§ 11. Поверхностные интегралы

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Поверхностный интеграл первого рода. Пусть поверхность S задана параметрически:

$$x=x(u;v),\quad y=y(u;v),\quad z=z(u;v),\quad (u;v)\in\overline{D}, \tag{1}$$