98. $2\pi a^3/3$. **99.** 1) $8\sqrt{2}a^3/3$; 2) $3a^3$; 3) $2\pi^2(2\pi^2+1)a^3$.
101. 1) $1/3$; 2) $9/8$; 3) $9/2$; 4) $4/5$; 5) πab; 6) $27\pi/2$; 7) $3\pi a^2/8$.
102. $(7\pi+3)ab/12$.
103. 1) π; 2) $a^2/6$; 3) $4/3$; 4) $8\pi/3$; 5) a^2; 6) $5\pi a^2/8$;
7) $(3\sqrt{3}+4\pi)/9\sqrt{3}$.
104. 1) $3/2$; 2) $4a^2/3$; 3) $1/30$.
106. 1) $\pi(\operatorname{sh} 2a-2a)/4$; 2) $9\pi^2$; 3) $8\pi/3$; 4) $32\pi a^3/105$; 5) $\pi^2/2$.
107. $-8/15$. **108.** $-aF_0$. **109.** 1) $4/3$; 2) $17/12$.
110. 1) 22; 2) 106; 3) 64.
111. 1) 0; 2) $113/3$; 3) $-6\pi a^2$; 4) $-3\pi/2$; 5) πab.
112. 1) а) 4; б) π; в) 1; 2) а) $-(\pi R+2y_0)R$; б) $(\pi R-2y_0)R$.
113. 1) и 2) $\mu(1/r_2-1/r_1)$, где $r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2}$, $j=1,2$.
114. 1), 2), 3) $\pi/2$. **115.** 1) 2π; 2) 0.
116. 1) и 2) $\lambda(x_0^2+y_0^2+z_0^2)/2$.
117. 1) 23; 2) $1/2$; 3) $-4/3$; 4) $\sin(2\pi b)-\pi a^2$; 5) $2\pi a^2$;
6) $(2\sqrt{2}-7/3)a^3$; 7) $2\pi R^2/\sqrt{3}$.
118. $\int\limits_{r_1}^{r_2} rf(r)\,dr$, $r_j=\sqrt{x_j^2+y_j^2+z_j^2}$, $j=1,2$.
120. $-\dfrac{2k\rho_0}{x^2+y^2}(x;y;0)$ (прямая совпадает с осью Oz).
121. $(0;0;kMmh/(a^2+h^2)^{3/2})$. **122.** 1) $RT\ln(p_1/p_2)$.
123. 1) $\oint\limits_{\partial G}\rho(x;y)(v(x;y)\,dx-u(x;y)\,dy)$; 2) $\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$.
124. 1) 0 при $r=\sqrt{x^2+y^2}<1$, $-2\pi\mu_0\ln r$ при $r>1$;
2) $\dfrac{\pi}{nr^n}\cos n\varphi$ при $r>1$, $\dfrac{\pi}{n}r^n\cos n\varphi$ при $r<1$ ($(r;\varphi)$ — полярные координаты точки $(x;y)$);
3) $\dfrac{\pi}{nr^n}\sin n\varphi$ при $r>1$, $\dfrac{\pi}{n}r^n\sin n\varphi$ при $r<1$.
125. 1) 0; 2) 2π.
126. 1) $\pi r^n\cos n\varphi$ при $r<1$, $-\pi r^{-n}\cos n\varphi$ при $r>1$ ($(r;\varphi)$ — полярные координаты точки $(x;y)$);
2) $\pi r^n\sin n\varphi$ при $r<1$, $-\pi r^{-n}\sin n\varphi$ при $r>1$.

§ 11. Поверхностные интегралы

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Поверхностный интеграл первого рода. Пусть поверхность S задана параметрически:

$$x=x(u;v),\quad y=y(u;v),\quad z=z(u;v),\quad (u;v)\in\overline{D}, \tag{1}$$

причем функции $x(u;v)$, $y(u;v)$, $z(u;v)$ дифференцируемы в измеримой области D. Пусть на этой поверхности задана функция $f(x;y;z)$.

Поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS$ от функции $f(x;y;z)$ по поверхности S может быть определен следующим образом:

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS = \iint\limits_D f(x(u;v);y(u;v);z(u;v))\,\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \quad (2)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Если подынтегральная функция в правой части равенства (2) непрерывна в D (в частности, если функция f непрерывна на S, а функции (1) непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$, то интеграл $\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS$ заведомо существует.

Поверхностный интеграл может быть определен и как предел соответствующих интегральных сумм (см., например, [3] или [4]).

Если поверхность S задана уравнением

$$z = z(x;y), \quad (x;y) \in \overline{D}, \quad (3)$$

где $z(x;y)$ — дифференцируемая в D функция, то равенство (2) принимает вид

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS = \iint\limits_D f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \quad (4)$$

Часто поверхность S не может быть задана в виде (3) или (1), но ее удается разбить на части S_i так, что каждая из частей допускает представление в нужном виде. В таких случаях под интегралом по поверхности S понимают сумму интегралов по ее частям:

$$\iint\limits_S f\,dS = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} f\,dS_i. \quad (5)$$

Если $f(x;y;z)$ — плотность массы, распределенной по поверхности S, то интегралы (2), (4) дают массу всей поверхности.

Потенциалом в точке M_0 простого слоя, распределенного с плотностью $\mu(x;y;z)$ на поверхности S называют интеграл

$$V(x_0;y_0;z_0) = \iint\limits_S \frac{\mu(x;y;z)}{r}\,dS,$$

где r — расстояние между точкой $M(x;y;z)$ поверхности S и точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

2. Поверхностные интегралы второго рода *). Пусть поверхность S задана параметрически:

$$x = x(u;v), \quad y = y(u;v), \quad z = z(u;v), \quad (u;v) \in \overline{D}, \tag{1}$$

функции $x(u;v)$, $y(u;v)$, $z(u;v)$ непрерывно дифференцируемы в D, причем ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix} \right\|$$

равен 2. В каждой точке $(u;v)$ такой поверхности существуют два противоположно направленных единичных нормальных вектора, каждый из которых является непрерывной функцией точки $(u;v)$ поверхности S. Выбор одного из них называют *ориентацией поверхности.* Если поверхность S является границей ограниченной области, то говорят, что ее можно ориентировать *внешней* или *внутренней* (по отношению к этой области) нормалями. Поверхность S, ориентированную внешней нормалью, называют ее *внешней стороной*, а ориентированную внутренней нормалью, — ее *внутренней стороной.*

Для ориентированной поверхности S определяют *поверхностный интеграл второго рода.*

Пусть $\cos\alpha$, $\cos\alpha$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

к поверхности (1) (см. §6, (7)). Пусть поверхность S ориентирована единичным вектором нормали $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, и пусть на поверхности S заданы функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$. Поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \tag{6}$$

определяется через поверхностный интеграл первого рода формулой

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \\ = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS. \tag{7}$$

Если поверхность S ориентирована противоположным образом, т. е. нормалью $(-\cos\alpha; -\cos\beta; -\cos\gamma)$, то у поверхностного интеграла изменяется только знак.

Для интеграла (6) имеет место следующая формула:

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv. \tag{8}$$

---

*) В этом и следующих пунктах используются только правые системы координат.

В частном случае $P = 0$, $Q = 0$ формула (8) имеет вид

$$\iint\limits_S R\,dx\,dy = \iint\limits_D R(x(u;v); y(u;v); z(u;v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv. \tag{9}$$

Аналогично записывают формулы для интегралов

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz, \qquad \iint\limits_S Q\,dz\,dx.$$

Если поверхность S задается явно, то формула (9) упрощается.

Пусть, например, поверхность S задана уравнением

$$z = z(x;y), \quad (x;y) \in \overline{D}, \tag{10}$$

где $z(x;y)$ — непрерывно дифференцируемая в $\overline{D}$ функция. Тогда

$$\iint\limits_S R\,dx\,dy = \pm \iint\limits_D R(x;y;z(x;y))\,dx\,dy, \tag{11}$$

где D — проекция поверхности S на плоскость $z = 0$.

Перед двойным интегралом в формуле (11) берется знак плюс, если поверхность S ориентирована нормалями, составляющими с осью z острый угол, и знак минус, если поверхность S ориентирована нормалями, образующими с осью z тупой угол. В первом случае говорят, что интеграл берется по верхней стороне поверхности, во втором — по ее нижней стороне.

Если поверхность S не представима в виде (10) или (1), но ее удается разбить на конечное число частей, каждая из которых представима в таком виде, то под поверхностным интегралом второго рода по поверхности S понимают сумму интегралов по ее частям.

3. Теорема Гаусса–Остроградского. Пусть $G \in R^3$ — элементарная область (см. § 8, п. 2), ограниченная кусочно гладкой поверхностью, и пусть функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ вместе со своими производными $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в $\overline{G}$. Тогда

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz, \tag{12}$$

где S — внешняя сторона поверхности, ограничивающей область G.

Формулу (12) называют *формулой Гаусса–Остроградского.* Иногда ее записывают в виде

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz, \tag{13}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S. Формула Гаусса–Остроградского может быть записана в векторной форме (см. § 12).

4. Теорема Стокса. Пусть S — ориентированная кусочно гладкая поверхность, ограниченная соответственно ориентированным контуром L *). Пусть функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой области $G \supset S$. Тогда

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \quad (14)$$

Формулу (14) называют *формулой Стокса.* Эта формула может быть записана в таком виде:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right) dS, \quad (15)$$

где $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ — вектор единичной нормали к поверхности S, направленный соответственно направлению контура L. Формулу (15) иногда записывают в символическом виде

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \quad (16)$$

Формула Стокса может быть записана в векторной форме (см. § 12).

Условимся говорить, что замкнутая кривая *ориентирована положительно* относительно некоторого вектора **a**, если направление на кривой (со стороны, в которую направлен вектор **a**) противоположно направлению движения часовой стрелки, и *ориентирована отрицательно* относительно вектора **a**, если направление на кривой совпадает с направлением движения часовой стрелки.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить интеграл $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, если S — часть цилиндрической поверхности

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u, \quad z = v; \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant v \leqslant H.$$

▲ В данном случае применима формула (2), причем $E = r^2$, $G = 1$, $G = 0$. Поэтому

$$\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^H \frac{r\,du\,dv}{\sqrt{r^2+v^2}} = 2\pi r \int\limits_0^H \frac{dv}{\sqrt{r^2+v^2}} =$$

*) Говорят, что поверхность и ограничивающий ее контур ориентированы соответственно, если наблюдатель, движущийся по контуру и смотрящий на поверхность с той стороны, куда направлена нормаль к поверхности, видит поверхность слева.

$$= 2\pi r \ln \frac{H + \sqrt{r^2 + H^2}}{r}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_S z^2\, dS$, где S — полная поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2$.

▲ Пусть S_1 — боковая поверхность конуса, S_2 — его основание; тогда

$$I = \iint\limits_{S_1} z^2\, dS_1 + \iint\limits_{S_2} z^2\, dS_2.$$

К первому интегралу применим формулу (4). На боковой поверхности конуса

$$z = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} z^2\, dS_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} (x^2+y^2)\sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^2 r^3\, dr\, d\varphi = 8\sqrt{2}\,\pi.$$

На основании конуса $z = 2$, поэтому второй интеграл равен учетверенной площади основания конуса $4\pi 2^2$. Итак, $I = 8\pi(2+\sqrt{2})$. ▲

Пример 3. Вычислить интеграл $\iint\limits_S z\, dx\, dy$, где S — нижняя сторона части конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 < z \leqslant H$.

▲ Поверхность S ориентирована нормалями, составляющими тупой угол с осью z. По формуле (11), взяв в ней знак “минус”, сводим интеграл к двойному, который вычисляем, переходя к полярным координатам:

$$\iint\limits_S z\, dx\, dy = -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant H^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^H r^2\, dr = -\frac{2}{3}\,\pi H^3. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Вычислить интегралы: а) $\iint\limits_S z^2\, dx\, dy$; б) $\iint\limits_S z\, dx\, dy$; где S — полусфера $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $y \geqslant 0$, ориентированная внешней нормалью.

▲ а) Разобьем поверхность S на части S_1 и S_2, расположенные соответственно выше и ниже плоскости $z = 0$. Тогда

$$\iint\limits_S z^2\, dx\, dy = \iint\limits_{S_1} z^2\, dx\, dy + \iint\limits_{S_2} z^2\, dx\, dy.$$

Поверхности S_1 и S_2 имеют одну и ту же проекцию D на плоскость $z = 0$. Согласно формуле (11) получаем

$$\iint\limits_{S_1} z^2\,dx\,dy = \iint\limits_{D} (R^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy,$$

так как внешняя нормаль к поверхности S_1 образует с осью z острый угол;

$$\iint\limits_{S_1} z^2\,dx\,dy = -\iint\limits_{D} (R^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy,$$

так как внешняя нормаль к поверхности S_2 образует тупой угол с осью z. Следовательно,

$$\iint\limits_{S} z^2\,dx\,dy = 0.$$

б) Как и в случае а), разбивая поверхность S на части S_1 и S_2 и применяя формулу (11), получаем

$$\iint\limits_{S_1} z\,dx\,dy = \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{S_2} z\,dx\,dy = -\iint\limits_{D} (-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})\,dx\,dy.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S} z\,dx\,dy = 2\iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = 2 \cdot \frac{\pi}{3}\,R^3 = \frac{2\pi}{3}\,R^3,$$

так как последний интеграл равен объему четвертой части шара радиуса R. ▲

Пример 5. Вычислить интеграл $K = \iint\limits_{S} \dfrac{dy\,dz}{x} + \dfrac{dz\,dx}{y} + \dfrac{dx\,dy}{z}$,

где S — часть эллипсоида

$$x = a\cos u\cos v, \quad y = b\sin u\cos v, \quad z = c\sin v,$$
$$u \in [\pi/4; \pi/3], \quad v \in [\pi/6; \pi/4],$$

ориентированного внешней нормалью.

▲ Заметим, что функции $1/x$, $1/y$, $1/z$ положительные, а углы, образованные внешней нормалью с осями координат, — острые, поэтому $K > 0$. Воспользуемся формулой (8). Так как

$$x'_u = -a\sin u\cos v, \quad y'_u = b\cos u\cos v, \quad z'_u = 0,$$
$$x'_v = -a\cos u\sin v, \quad y'_v = -b\sin u\sin v, \quad z'_v = c\cos v,$$

то

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{z} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a\cos u\cos v} & \dfrac{1}{b\sin u\cos v} & \dfrac{1}{c\sin v} \\ -a\sin u\cos v & b\cos u\cos v & 0 \\ -a\cos u\sin v & -b\sin u\sin v & c\cos v \end{vmatrix} = p\cos v,$$

где
$$p = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}.$$

Поэтому по формуле (8) получаем
$$K = p\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} du \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \cos v\, dv = p\frac{\pi}{12}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{24}\left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 6. Вычислить интеграл
$$I = \iint\limits_S x^3\, dy\, dz + y^3\, dz\, dx + z^3\, dx\, dy,$$

где S — внешняя сторона боковой поверхности конуса G: $x^2 + y^2 \leqslant \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

▲ Обозначим через I_1 интеграл по внешней стороне полной поверхности S_1 конуса, через I_2 — интеграл по верхней стороне его основания S_2. Тогда $I = I_1 - I_2$. К интегралу I_1 применим формулу Гаусса–Остроградского
$$I_1 = 3\iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Переходя к цилиндрическим координатам, вычислим полученный тройной интеграл
$$I_1 = 3\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^z (r^2 + z^2) r\, dr = \frac{9}{10}\,\pi.$$

Вычислим интеграл по основанию конуса:
$$I_2 = \iint\limits_{S_2} x^3\, dy\, dz + y^3\, dz\, dx + z^3\, dx\, dy = \iint\limits_{S_2} dx\, dy = \pi.$$

Следовательно, $I = -\pi/10$. ▲

Пример 7. Вычислить интеграл
$$A = \int\limits_L (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz,$$

где L — кривая пересечения параболоида $x^2 + y^2 + z = 3$ с плоскостью $x + y + z = 2$, ориентированная положительно относительно вектора $(1; 0; 0)$.

▲ Применим формулу Стокса. За поверхность S, ограниченную кривой L, примем часть секущей плоскости $x + y + z = 2$, лежащей внутри параболоида. Единичным вектором нормали к S, направленным соответственно направлению кривой L, является вектор $(1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3})$. Так как $P = y^2 - z^2$, $Q = z^2 - x^2$, $R = x^2 - y^2$, то
$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2(z + y), \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2(x + z),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(y + x).$$

Применяя формулу (15), получаем

$$A = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint\limits_S (x+y+z)\,dS = -\frac{8}{\sqrt{3}} \iint\limits_S dS.$$

Так как $z = 2 - x - y$ на поверхности S, то

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

По формуле (4) находим

$$A = -8 \iint\limits_D dx\,dy,$$

где D — проекция S на плоскость xOy. Исключая z из уравнений

$$x^2 + y^2 + z = 3, \quad x + y + z = 2,$$

получаем

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 3/2,$$

т. е. D — есть круг радиуса $\sqrt{3/2}$. Следовательно,

$$\iint\limits_D dx\,dy = \frac{3}{2}\,\pi, \quad A = -12\pi. \ \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ

Вычислить интегралы (1–13).

1. $\displaystyle\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где:

1) S — часть плоскости $x + 2y + 4z = 4$, выделяемая условиями $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

2) S — часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, выделяемая условием $z \geqslant 0$.

2. $\displaystyle\iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dS$, где:

1) S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

2) S — поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$.

3. $\displaystyle\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$, где:

1) S — сферах $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

2) S — поверхность куба $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant a$, $|z| \leqslant a$;

3) S — поверхность октаэдра $|x| + |y| + |z| \leqslant a$;

4) S — полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

4. $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, S — поверхность тетраэдра $x + y + z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

5. 1) $\iint\limits_S xyz\,dS$; 2) $\iint\limits_S |xy|z\,dS$; где S — часть параболоида $z = x^2 + y^2$, выделяемая условием $z \leqslant 1$.

6. 1) $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dS$; 2) $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}dS$; где S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, выделяемая условием $z \leqslant 1$.

7. 1) $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$; 2) $\iint\limits_S (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,dS$; где S — часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, расположенная внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

8. 1) $\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS$; 2) $\iint\limits_S \dfrac{dS}{f(x;y;z)}$;

3) $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\,\dfrac{dS}{f(x;y;z)}$;

где $f = \sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}$, S — эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

9. $\iint\limits_S (x^2+y^2+(z-a)^2)^{-n/2}dS$, $n \in N$, S — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

10. $\iint\limits_S z^2\,dS$, S — часть конической поверхности

$$x = u\cos v\sin\alpha, \quad y = u\sin v\sin\alpha, \quad z = u\cos\alpha,$$

$\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha \in (0;\pi/2)$, выделяемая условиями $u \in [0;1]$, $v \in [0;2\pi]$.

11. $\iint\limits_S z\,dS$, S — поверхность

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v, \quad u \in [0;1], \quad v \in [0;2\pi].$$

12. $\iint\limits_S f(r)\,dS$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $f(r) = \begin{cases} 1-r^2, & r \leqslant 1, \\ 0, & r \geqslant 1, \end{cases}$ S — плоскость $x+y+z=a$.

13. $\iint\limits_S f(r;z)\,dS$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $f(r;z) = \begin{cases} r^2, & r \leqslant z, \\ 0, & r \geqslant z, \end{cases}$ S — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

14. Доказать *формулу Пуассона*

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS = 2\pi\int\limits_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}t)\,dt,$$

где $f(t)$, $|t| \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, — непрерывная функция, S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

15. Определить массу, распределенную:

1) по поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$ с поверхностной плотностью $\rho = \rho_0 xyz$;

2) по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с плотностью:

а) $\rho = \rho_0\sqrt{x^2+y^2}$, б) $\rho = \rho_0(x^2+y^2)$;

3) по части эллиптического параболоида $x^2 + y^2 = 2z$, $z \leqslant 1$ с плотностью $\rho = \rho_0 z$;

4) по части гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = 2z$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, с плотностью $\rho = \rho_0|z|$, $\rho_0 = \mathrm{const}$.

16. Определить статический момент относительно плоскости $z = 0$ однородной ($\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$) поверхности:

1) $x + y + z = a$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

17. Определить аппликату центра масс полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$ с поверхностной плотностью:

1) $\rho = \rho_0$; 2) $\rho = \rho_0\sqrt{x^2+y^2}$; 3) $\rho = \rho_0(x^2+y^2)$, $\rho_0 = \mathrm{const}$.

18. Определить координаты центра масс однородных поверхностей:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

2) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant R$;

3) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant x$; 4) $z = 2 - (x^2+y^2)/2$, $z \geqslant 0$;

5) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = v$, $u \in [0;1]$, $v \in [0;\pi]$.

19. Вычислить моменты инерции относительно координатных плоскостей однородной ($\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$) поверхности:

1) $x + y + z = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

2) $z = \dfrac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

20. Вычислить момент инерции однородной ($\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$) поверхности:

1) $x^2 + y^2 = 2az$, $z \leqslant a$, относительно оси Oz;

2) $x^2/a^2 + y^2/a^2 = z^2/b^2$, $0 \leqslant z \leqslant b$, относительно прямой $y = 0$, $z = b$.

21. Найти величину силы, с которой однородная поверхность:

1) $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = z$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $z \in [0;H]$;

2) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $r \in [a;b]$, $a > 0$;

плотности ρ_0 притягивает точку массы m, помещенную в начале координат.

22. Найти величину силы, с которой однородная сфера радиуса R и плотности $\rho = \rho_0$ притягивает точку массы m.

23. Определить электрический заряд, распределенный с плотностью $\rho = \rho_0|z|$ по поверхности:

1) $x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/c^2 = 0$, $|z| \leqslant c$;

2) $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$, $|z| \leqslant a\sqrt{2}$.

24. Найти потенциал в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ простого слоя (п. 1), распределенного:

1) на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ с постоянной плотностью μ_0;

2) на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$ с постоянной плотностью μ_1 и на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2$ с постоянной плотностью μ_2, $R_1 < R_2$.

25. Найти в точке $(0; 0; z)$ потенциал простого слоя, распределенного с плотностью μ:

1) на боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$, $\mu = \mu_0$;

2) на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $\mu = \mu_0 z^2$.

Вычислить интегралы (26–43).

26. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, S — нижняя сторона круга $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $z = 0$.

27. $\iint\limits_S (2z - x)\,dy\,dz + (x + 2z)\,dz\,dx + 3z\,dx\,dy$, S — верхняя сторона треугольника $x + 4y + z = 4$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

28. 1) $\iint\limits_S xz\,dx\,dy$; 2) $\iint\limits_S yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$; S — внутренняя сторона поверхности тетраэдра $x + y + z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

29. $\iint\limits_S f_1(x)\,dy\,dz + f_2(y)\,dz\,dx + f_3(z)\,dx\,dy$, где f_1, f_2, f_3 — непрерывные функции, S — внешняя сторона поверхности параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$.

30. 1) $\iint\limits_S y\,dz\,dx$; 2) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz$; S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

31. 1) $\iint\limits_S (x^5 + z)\,dy\,dz$; 2) $\iint\limits_S x^2y^2\,z\,dx\,dy$; S — внутренняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \leqslant 0$.

32. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + z^2\,dx\,dy$, S — внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

33. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, S — внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

34. $\iint\limits_S z^2\,dx\,dy$, S — внутренняя сторона полусферы $(x-a)^2+$ $+(y-b)^2+z^2=R^2$, $z\geqslant 0$.

35. $\iint\limits_S (x-1)^3 dy\,dz$, S — внешняя сторона полусферы x^2+y^2+ $+z^2=2x$, $z\leqslant 0$.

36. 1) $\iint\limits_S dz\,dx$; 2) $\iint\limits_S x\,dy\,dz$; 3) $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz$; 4) $\iint\limits_S \dfrac{dx\,dy}{z}$; S — внешняя сторона эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

37. 1) $\iint\limits_S yz\,dz\,dx$; 2) $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx$; S — внешняя сторона части эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$, $z\geqslant 0$.

38. $\iint\limits_S (2x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz$, S — внешняя сторона боковой поверхности конуса $\sqrt{y^2+z^2}\leqslant x\leqslant H$.

39. $\iint\limits_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dz\,dx+(x-y)\,dx\,dy$, S — одна из сторон поверхности $x^2+y^2=z^2$, $0<z\leqslant H$.

40. $\iint\limits_S yz^2\,dx\,dz$, S — внутренняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=r^2$, $y\leqslant 0$, $0\leqslant z\leqslant r$.

41. $\iint\limits_S yz\,dx\,dy+zx\,dy\,dz+xy\,dz\,dx$, S — внешняя сторона части цилиндра $x^2+y^2=r^2$, $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $0\leqslant z\leqslant H$.

42. $\iint\limits_S x^6\,dy\,dz+y^4\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, S — нижняя сторона части эллиптического параболоида $z=x^2+y^2$, $z\leqslant 1$.

43. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, S — верхняя сторона части гиперболического параболоида $z=x^2-y^2$, $|y|\leqslant x\leqslant a$.

С помощью теоремы Гаусса–Остроградского вычислить интегралы (44–48).

44. $\iint\limits_S (1+2x)\,dy\,dz+(2x+3y)\,dz\,dx+(3y+4z)\,dx\,dy$, где S:

1) внешняя сторона поверхности пирамиды $x/a+y/b+z/c\leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$;

2) внутренняя сторона поверхности $|x-y+z|+|y-z+x|+$

$+|z-x+y|=a$.

45. $\iint\limits_S z\,dx\,dy+(5x+y)\,dy\,dz$, где S:

1) внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2\leqslant z^2$, $0\leqslant z\leqslant 4$;

2) внутренняя сторона эллипсоида $x^2/4+y^2/9+z^2=1$;

3) внешняя сторона границы области $1<x^2+y^2+z^2<4$.

46. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, где S:

1) внутренняя сторона поверхности параллелепипеда $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$;

2) внешняя сторона полной поверхности $x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant z^2/c^2$, $0\leqslant$ $\leqslant z\leqslant c$ (конус).

47. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy$, где S:

1) внешняя сторона поверхности тетраэдра $x+y+z\leqslant a$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$;

2) внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

48. $\iint\limits_S x^4\,dy\,dz+y^4\,dz\,dx+z^4\,dx\,dy$, где S:

1) сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$;

2) внешняя сторона полной поверхности полушара $x^2+y^2+z^2\leqslant$ $\leqslant R^2$, $z\geqslant 0$.

49. Доказать для объема V тела, ограниченного гладкой поверхностью S, формулу

$$V=\left|\frac{1}{3}\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy\right|.$$

50. Используя формулу из задачи 49, найти объем тела, ограниченного:

1) поверхностью $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=-u+a\cos v$ ($u\geqslant 0$, $a>0$) и плоскостями $x=0$, $z=0$;

2) поверхностью $x=(b+a\cos u)\cos v$, $y=(b+a\cos u)\sin v$; $z=$ $=a\sin u$, $b\geqslant a>0$;

3) поверхностью $x=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v$, $y=a\cos u\sin v-$ $-b\sin u\cos v$, $z=c\sin u$ и плоскостями $z=c$, $z=-c$.

Вычислить интегралы (51–55).

51. $\iint\limits_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности, образованной вращением вокруг оси z кривой:

1) $y=2-|z-1|$, $z\in[0;2]$; 2) $x=1+\sin z$, $z\in[0;\pi]$.

52. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S:

1) нижняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geqslant 0$;

2) верхняя сторона части поверхности параболоида $x^2+y^2+2az=a^2$, $z\geqslant 0$;

3) нижняя сторона части конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, $0<z\leqslant H$.

53. $\iint\limits_S (z^2-y^2)\,dy\,dz + (x^2-z^2)\,dz\,dx + (y^2-x^2)\,dx\,dy$, S — верхняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geqslant 0$.

54. $\iint\limits_S x^2y\,dy\,dz + xy^2\,dz\,dx + xyz\,dx\,dy$, S — нижняя сторона части сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$.

55. $\iint\limits_S x^2y\,dy\,dz - xy^2\,dz\,dx + (x^2+y^2)z\,dx\,dy$, S — внешняя сторона части цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, $0\leqslant z\leqslant H$.

56. Доказать, что если S — замкнутая гладкая поверхность, $\mathbf{n}$ — ее внешняя нормаль, $\mathbf{l}$ — некоторый постоянный вектор, то

$$\iint\limits_S \cos(\widehat{\mathbf{l},\mathbf{n}})\,dS = 0.$$

57. Пусть $G\in R^3$ — ограниченная область с гладкой границей S, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, $\mathbf{r}=(\xi-x)\mathbf{i}+(\eta-y)\mathbf{j}+(\zeta-z)\mathbf{k}$:

1) доказать формулу

$$\iint\limits_S \cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})\,dS = 2\iiint\limits_G \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{|\mathbf{r}|};$$

2) вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x;y;z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{\mathbf{r}^2}\,dS, \quad (x;y;z)\notin S.$$

58. Доказать, что если $G\in R^3$ — ограниченная область с гладкой границей S, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль S, $u(x;y;z)$ и $v(x;y;z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые в $\overline{G}$ функции, то

$$\iiint\limits_G \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \\ u & v \end{vmatrix}\,dS.$$

59. Доказать, что если $u(x;y;z)$ — гармоническая функция в ограниченной замкнутой области $\overline{G}$ с гладкой границей S, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, $\mathbf{r}=(\xi-x)\,\mathbf{i}+(\eta-y)\,\mathbf{j}+(\zeta-z)\,\mathbf{k}$, то

$$u(x;y;z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(u\,\frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{\mathbf{r}^2} + \frac{1}{|\mathbf{r}|}\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)dS.$$

60. Доказать, что если $u(x;y;z)$ — функция, гармоническая внутри сферы S радиуса R с центром в точке $(x_0;y_0;z_0)$, то

$$u(x_0;y_0;z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_S u(x;y;z)\,dS.$$

Используя формулу Стокса, вычислить интегралы (61–68).

61. $\int\limits_L (x+z)\,dx+(x-y)\,dy+x\,dz$, L — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=$ $=c$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(0;0;1)$.

62. $\int\limits_L y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, L — граница треугольника с вершинами в точках $(a;0;0)$, $(0;a;0)$, $(0;0;a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;1;0)$.

63. 1) $\int\limits_L y\,dx+z\,dy+x\,dz$;

2) $\int\limits_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+z\,dz$; где L — окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;0;1)$.

64. $\int\limits_L (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$, L — кривая пересечения поверхности куба $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$, $|z|\leqslant a$ плоскостью $x+$ $+y+z=3a/2$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;0;0)$.

65. $\int\limits_L (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, где:

1) L — окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x\operatorname{tg}\varphi$, $\varphi\in(0;\pi)$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;0;0)$;

2) L — эллипс $x^2+y^2=a^2$, $x/a+z/c=1$, $a>0$, $c>0$, ориентированный отрицательно относительно вектора $(1;0;0)$.

66. $\int\limits_L y\,dx-z\,dy+x\,dz$, L — кривая $x^2+y^2+2z^2=2a^2$, $y-x=$ $=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;0;0)$.

67. $\int\limits_L (y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, L — кривая x^2+ $+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $z>0$, $0<b<a$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;0;1)$.

68. $\int\limits_L z^3dx+x^3dy+y^3dz$, L — кривая $2x^2-y^2+z^2=a^2$, $x+y=$ $=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(1;0;0)$.

Вычислить интегралы (69–72), если кривая L ориентирована в направлении возрастания параметра t.

69. $\int\limits_L x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, L — кривая $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $t \in [0; 2\pi)$.

70. $\int\limits_L y^2z^2\,dx + x^2z^2\,dy + x^2y^2 dz$, L — кривая $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, $t \in [0; 2\pi)$.

71. $\int\limits_L (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, L — кривая $x = a\sin^2 t$, $y = a\sin 2t$, $z = a\cos^2 t$, $t \in [0; \pi)$.

72. $\int\limits_L (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - zx)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$, L — кривая $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht/(2\pi)$, $t \in [0; 2\pi]$.

ОТВЕТЫ

1. 1) $7\sqrt{21}/3$; 2) π. **2.** 1) $8\pi R^4/3$; 2) $\pi(1+\sqrt{2})/2$.

3. 1) $4\pi R^4$; 2) $40a^4$; 3) $2\sqrt{3}a^4$; 4) $\pi r(r^3 + 2r^2H + rH^2 + 2H^3/3)$.

4. $(\sqrt{3}-1)(\ln 2 + \sqrt{3}/2)$. **5.** 1) 0; 2) $(125\sqrt{5}-1)/420$.

6. 1) $\pi/\sqrt{2}$; 2) $2\pi\sqrt{2}/3$. **7.** 1) $64\sqrt{2}/15$; 2) $29\pi\sqrt{2}/8$.

8. 1) $\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$; 2) $4\pi abc$; 3) 4π.

9. $\frac{2\pi R}{a(n-2)}(|a-R|^{2-n} - |a+R|^{2-n})$, $n \neq 2$; $\frac{2\pi R}{a}\ln\left|\frac{a+R}{a-R}\right|$, $n = 2$, если $a \neq 0$; $4\pi R^{2-n}$, если $a = 0$.

10. $(\pi\sin\alpha\cos^2\alpha)/2$. **11.** $\pi^2(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$.

12. $\pi(a^2-3)^2/18$, если $|a| \leqslant \sqrt{3}$; 0, если $|a| > \sqrt{3}$.

13. $\pi(8-5\sqrt{2})R^4/6$.

15. 1) $3\rho_0 a^3/4$; 2) а) $\rho_0\pi^2R^3$; б) $8\rho_0\pi R^4/3$; 3) $2\pi(1+6\sqrt{3})\rho_0/15$; 4) $8(1+\sqrt{2})\rho_0/15$.

16. 1) $\sqrt{3}\rho_0 a^3/6$; 2) $\pi\rho_0 R^3$. **17.** 1) $R/2$; 2) $4R/3\pi$; 3) $3R/8$.

18. 1) $\left(\frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{R}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}R; \frac{\sqrt{2}}{4}R; \frac{\sqrt{2}+1}{\pi}R\right)$; 3) $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{16}{9\pi}\right)$; 4) $\left(0; 0; \frac{307-15\sqrt{5}}{310}\right)$; 5) $\left(0; \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))}; \frac{\pi}{2}\right)$.

19. 1) $\rho_0\sqrt{3}/12$; 2) $I_{xy} = \pi\rho_0 rh^2 l/4$, $I_{yz} = I_{zx} = \pi\rho_0 r^3 l/4$, где $l = \sqrt{r^2+h^2}$.

20. 1) $4\pi\frac{6\sqrt{3}+1}{15}\rho_0 a^4$, 2) $\pi\rho_0 a(3a^2+2b^2)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{12}$.

21. 1) $2\pi\rho_0 ma\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+H^2}}\right)$; 2) $\pi\rho_0 m\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

22. $4\pi\rho_0 mR^2/r^2$, если $r > R$; 0, если $r < R$; $2\pi\rho_0 m$, если $r = R$; r — расстояние точки от центра сферы.

23. 1) $\dfrac{4}{3}\pi\rho_0 ac\sqrt{a^2+c^2}$; 2) $2\pi\rho_0\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\right)a^3$.

24. 1) $\dfrac{4\pi\mu_0 R^2}{a}$, если $a \geqslant R$; $a = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$;

2) $4\pi(\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2)$, если $a \leqslant R_1$; $4\pi\left(\dfrac{\mu_1 R_1^2}{a} + \mu_2 R_2\right)$, если $R_1 \leqslant a \leqslant R_2$; $\dfrac{4\pi}{a}(\mu_1 R_1^2 + \mu_2 R_2^2)$, $a \geqslant R_2$; $a = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

25. 1) $2\pi\mu_0 R\ln\dfrac{\sqrt{R^2+(H-z)^2}+H-z}{\sqrt{R^2+z^2}-z}$;

2) $\dfrac{4\pi\mu_0 R^2}{3z}\left(1+\dfrac{2R^2}{5z^2}\right)$, если $|z| \geqslant R$;

$\dfrac{4\pi\mu_0 R}{3}\left(1+\dfrac{2z^2}{5R^2}\right)$, если $|z| \leqslant R$.

26. -8π. **27.** $128/3$. **28.** 1) $-1/24$; 2) 0.

29. $(f_1(a)-f_1(0))bc + (f_2(b)-f_2(0))ac + (f_3(c)-f_3(0))ab$.

30. 1) $4\pi R^3/3$; 2) 0. **31.** 1) $-2\pi R^7/7$; 2) $-2\pi R^7/105$.

32. $-\pi R^4$. **33.** $8\pi(a+b+c)R^3/3$. **34.** $-\pi R^4/2$. **35.** $-2\pi/5$.

36. 1) 0; 2) $4\pi abc/3$; 3) 0; 4) $4\pi ab/c$.

37. 1) $\pi abc^2/4$; 2) $2\pi(a^2+b^2)abc/5$. **38.** $-3\pi H^4/2$. **39.** 0.

40. $-\pi r^5/6$. **41.** $(\pi H/8 - r/3)r^2 H$. **42.** $-\pi/3$. **43.** $-a^4/3$.

44. 1) $3abc/2$; 2) $-3a^3$. **45.** 1) 128π; 2) -48π; 3) 56π.

46. 1) $(a+b+c)abc$; 2) $\pi abc^2/2$. **47.** 1) $3a^5/20$; 2) $12\pi R^5/5$.

48. 1) 0; 2) $\pi R^6/3$. **50.** 1) $2a^3/9$; 2) $2\pi^2 a^2 b$; 3) $2\pi(2a^2+b^2)|c|/3$.

51. 1) 12π; 2) $\pi(24+7\pi)/2$.

52. 1) $-\pi R^4/2$; 2) $\pi a^4/12$; 3) $-\pi H^4/2$. **53.** 0. **54.** $-R^5/3$.

55. 0. **57.** 2) 4π, если $(x;y;z) \in \overline{G}$; 0, если $(x;y;z) \notin \overline{G}$.

61. $-\pi ab$. **62.** $-a^3$. **63.** 1) $\pi\sqrt{3}R^2$; 2) 2π. **64.** $-45a^3/8$.

65. 1) $2\sqrt{2}\pi a^2\sin(\pi/4-\varphi)$; 2) $2(a+c)a\pi$. **66.** $2\pi a^2$. **67.** $2\pi ab^2$.

68. $3\pi R^4/2$. **69.** $-\pi a^2$. **70.** 0. **71.** 0. **72.** h^3.

§ 12. Скалярные и векторные поля

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Скалярное и векторное поле. Пусть Ω — область в трехмерном пространстве.

Скалярным полем на Ω называют числовую функцию $u(M)$, заданную на точках $M \in \Omega$.

Векторным полем на Ω называют векторную функцию $\mathbf{a}(M)$, заданную на точках $M \in \Omega$.