22. $4\pi\rho_0 mR^2/r^2$, если $r > R$; 0, если $r < R$; $2\pi\rho_0 m$, если $r = R$; r — расстояние точки от центра сферы.

23. 1) $\dfrac{4}{3}\pi\rho_0 ac\sqrt{a^2+c^2}$; 2) $2\pi\rho_0\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{3}\right)a^3$.

24. 1) $\dfrac{4\pi\mu_0 R^2}{a}$, если $a \geqslant R$; $a = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$;

2) $4\pi(\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2)$, если $a \leqslant R_1$; $4\pi\left(\dfrac{\mu_1 R_1^2}{a} + \mu_2 R_2\right)$, если $R_1 \leqslant$ $\leqslant a \leqslant R_2$; $\dfrac{4\pi}{a}(\mu_1 R_1^2 + \mu_2 R_2^2)$, $a \geqslant R_2$; $a = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$.

25. 1) $2\pi\mu_0 R \ln \dfrac{\sqrt{R^2+(H-z)^2}+H-z}{\sqrt{R^2+z^2}-z}$;

2) $\dfrac{4\pi\mu_0 R^2}{3z}\left(1+\dfrac{2R^2}{5z^2}\right)$, если $|z| \geqslant R$;

$\dfrac{4\pi\mu_0 R}{3}\left(1+\dfrac{2z^2}{5R^2}\right)$, если $|z| \leqslant R$.

26. -8π. **27.** $128/3$. **28.** 1) $-1/24$; 2) 0.

29. $(f_1(a)-f_1(0))bc + (f_2(b)-f_2(0))ac + (f_3(c)-f_3(0))ab$.

30. 1) $4\pi R^3/3$; 2) 0. **31.** 1) $-2\pi R^7/7$; 2) $-2\pi R^7/105$.

32. $-\pi R^4$. **33.** $8\pi(a+b+c)R^3/3$. **34.** $-\pi R^4/2$. **35.** $-2\pi/5$.

36. 1) 0; 2) $4\pi abc/3$; 3) 0; 4) $4\pi ab/c$.

37. 1) $\pi abc^2/4$; 2) $2\pi(a^2+b^2)abc/5$. **38.** $-3\pi H^4/2$. **39.** 0.

40. $-\pi r^5/6$. **41.** $(\pi H/8 - r/3)r^2 H$. **42.** $-\pi/3$. **43.** $-a^4/3$.

44. 1) $3abc/2$; 2) $-3a^3$. **45.** 1) 128π; 2) -48π; 3) 56π.

46. 1) $(a+b+c)abc$; 2) $\pi abc^2/2$. **47.** 1) $3a^5/20$; 2) $12\pi R^5/5$.

48. 1) 0; 2) $\pi R^6/3$. **50.** 1) $2a^3/9$; 2) $2\pi^2 a^2 b$; 3) $2\pi(2a^2+b^2)|c|/3$.

51. 1) 12π; 2) $\pi(24+7\pi)/2$.

52. 1) $-\pi R^4/2$; 2) $\pi a^4/12$; 3) $-\pi H^4/2$. **53.** 0. **54.** $-R^5/3$.

55. 0. **57.** 2) 4π, если $(x;y;z) \in \overline{G}$; 0, если $(x;y;z) \notin \overline{G}$.

61. $-\pi ab$. **62.** $-a^3$. **63.** 1) $\pi\sqrt{3}R^2$; 2) 2π. **64.** $-45a^3/8$.

65. 1) $2\sqrt{2}\pi a^2 \sin(\pi/4 - \varphi)$; 2) $2(a+c)a\pi$. **66.** $2\pi a^2$. **67.** $2\pi ab^2$.

68. $3\pi R^4/2$. **69.** $-\pi a^2$. **70.** 0. **71.** 0. **72.** h^3.

§ 12. Скалярные и векторные поля

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Скалярное и векторное поле. Пусть Ω — область в трехмерном пространстве.

Скалярным полем на Ω называют числовую функцию $u(M)$, заданную на точках $M \in \Omega$.

Векторным полем на Ω называют векторную функцию $\mathbf{a}(M)$, заданную на точках $M \in \Omega$.

Если в пространстве введена какая-либо декартова система координат, то скалярное поле $u(M)$ или векторное поле $\mathbf{a}(M)$ на Ω становятся функциями координат точек:

$$u(x;y;z), \quad \mathbf{a}(x;y;z) = (a_x(x;y;z); a_y(x;y;z); a_z(x;y;z)).$$

При выборе другой декартовой системы координат меняются, вообще говоря, координаты точек $M(x;y;z)$ на $M(x';y';z')$, но значения скалярного или векторного поля в точках не меняются, т. е.

$$u'(x';y';z') = u(x;y;z), \quad \mathbf{a}'(x';y';z') = \mathbf{a}(x;y;z).$$

Множество точек M, задаваемое уравнением $u(M) = \mathrm{const}$, называют *поверхностью уровня* скалярного поля u.

Векторной или *силовой линией* векторного поля $\mathbf{a}$ называют гладкую кривую, которая в каждой своей точке M касается вектора поля $\mathbf{a}(M)$. Если $\mathbf{r} = (x;y;z)$ — радиус-вектор переменной точки векторной линии поля $\mathbf{a} = (a_x;a_y;a_z)$, то

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} \tag{1}$$

(*дифференциальные уравнения силовых линий*).

Пусть γ — плоская кусочно гладкая простая *) замкнутая кривая, нигде не касающаяся векторных линий поля $\mathbf{a}$. Поверхность, образованную векторными линиями, пересекающими γ, называют *векторной трубкой* поля $\mathbf{a}$.

2. Символ ∇. Операции над полями. Векторный дифференциальный символ ∇ называют *набла* по обозначающей его букве, а также символом или оператором Гамильтона.

В прямоугольной декартовой системе координат

$$\nabla \equiv \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}, \tag{2}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — ортонормированный базис. Координатные символы этого оператора $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ — символы частных производных — при замене одного *ортонормированного базиса* на другой *ортонормированный* меняются по тем же правилам, что и координаты векторов. Сам же оператор ∇ не меняет своего вида (2) **).

Градиентом дифференцируемого на Ω скалярного поля U в точке $M \in \Omega$ называют вектор, обозначаемый $\mathrm{grad}\, U$ или ∇U и задаваемый в прямоугольной декартовой системе координат формулой

$$\mathrm{grad}\, U \equiv \nabla U \equiv \mathbf{i}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{3}$$

где производные поля U вычислены в точке $M(x;y;z)$. Значение $\mathrm{grad}\, U(M)$ в точке M не зависит от выбора прямоугольной системы координат, т. е. вектор-функция $\mathrm{grad}\, U$ является векторным полем на Ω.

---

*) *Простой* называют кривую, не имеющую точек самопересечений.

**) Детальнее см. [9, ч. 2].

Для производной дифференцируемого поля U в точке M *по направлению* произвольного единичного вектора $\mathbf{l}$ верна формула

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{l}} = (\mathbf{l}, \operatorname{grad} U). \tag{4}$$

Вводя скалярный дифференциальный символ (l, ∇), имеющий в прямоугольной декартовой системе координат вид

$$(\mathbf{l}, \nabla) \equiv l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\mathbf{l} = (l_x; l_y; l_z)$, равенство (4) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} = (\mathbf{l}, \nabla)\, u. \tag{6}$$

Градиент поля в точке M направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через M, в сторону возрастания поля, и его модуль $|\operatorname{grad} u| \equiv |\nabla u|$ равен наибольшей производной по направлению в этой точке.

Кроме символа (5) используют аналогичный скалярный дифференциальный символ, имеющий в прямоугольной системе координат вид

$$(\mathbf{b}, \nabla) \equiv b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + b_z \frac{\partial}{\partial z}, \tag{7}$$

где $\mathbf{b} = (b_x; b_y; b_z)$ — произвольное векторное поле. Результат его применения к дифференцируемому векторному полю $\mathbf{a}$

$$(\mathbf{b}, \nabla)\, \mathbf{a} = b_x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}, \tag{8}$$

являющийся вектор-функцией, называют иногда *градиентом* $\mathbf{a}$ *по* $\mathbf{b}$.

Дивергенцией или *расходимостью* дифференцируемого на Ω векторного поля $\mathbf{a}$ в точке $M \in \Omega$ называют число, обозначаемое $\operatorname{div} \mathbf{a}$ или $(\nabla, \mathbf{a})$ и задаваемое в прямоугольной декартовой системе координат формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv (\nabla, \mathbf{a}) \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{9}$$

где $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и производные вычислены в точке $M(x; y; z)$.

Значения числовой функции $\operatorname{div} \mathbf{a}$ в точках Ω не зависят от выбора прямоугольной системы координат, т. е. $\operatorname{div} \mathbf{a}$ — скалярное поле на Ω.

Ротором (говорят также — *вихрем*, *ротацией*) дифференцируемого на Ω векторного поля $\mathbf{a}$ в точке $M \in \Omega$ называют вектор, обозначаемый $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ или $[\nabla, \mathbf{a}]$ (а иногда $\nabla \times \mathbf{a}$) и задаваемый в прямоугольной положительно ориентированной (правой) системе координат формулой

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv [\nabla, \mathbf{a}] \equiv \mathbf{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right), \tag{10}$$

где $\mathbf{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и производные вычислены в точке $M(x; y; z)$.

Значения векторной функции $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в точках Ω не зависят от выбора прямоугольных систем координат одинаковой ориентации, но $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ меняет знак при смене ориентации системы координат.

Для записи $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ используют такой же символический определитель, как и для векторного произведения векторов:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} \equiv [\nabla, \mathbf{a}] \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{11}$$

При раскрытии определителя по первой строке результатом "умножения" символов второй строки на элементы третьей является дифференцирование, например,

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot a_z = \frac{\partial a_z}{\partial y}.$$

Формулы (3), (9), (10) определяют над скалярными и векторными полями три основные дифференциальные операции первого порядка — действия ∇ на скаляр или вектор. Для этих операций используют такие же обозначения, как и для произведений вектора на скаляр или вектор, и обладают эти операции такими же свойствами, как и эти произведения. Но последнее — с учетом, во-первых, невозможности перестановки символа ∇ с тем скаляром или вектором, на который он действует, и, во-вторых, дифференциального характера символа ∇.

Операции (3), (9), (10) линейны.

Результатом их применения к произведению двух сомножителей является сумма двух слагаемых, в каждом из которых ∇ действует только на один из сомножителей. После отметки этого сомножителя (здесь будет использована вертикальная стрелка сверху) к получившемуся выражению применимы все те преобразования, что и для векторных выражений. В итоге преобразований символ ∇ и отмеченный сомножитель должны быть совмещены под знаком одной из операций (3), (9), (10), (7). После этого метку можно снять.

Символ ∇ может встречаться в выражении не раз, создавая дифференциальные символы второго и более высоких порядков.

Для скалярного символа

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} \equiv (\nabla, \nabla) \equiv \nabla^2 \tag{12}$$

вводят обозначение Δ и называют его *оператором Лапласа* или *лапласианом*. Легко надеть, что

$$\Delta u \equiv \nabla^2 u \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{13}$$

Символ $[\nabla, \nabla]$, как нетрудно проверить, нулевой, что естественно с точки зрения векторной алгебры. Имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla]\, u = \mathbf{0}, \tag{14}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = (\nabla, [\nabla, \mathbf{a}]) = ([\nabla, \nabla], \mathbf{a}) = 0. \tag{15}$$

3. Циркуляция и поток векторного поля. Пусть $\mathbf{a}$ — непрерывное векторное поле в области Ω, Γ — кусочно гладкая ориентированная кривая в Ω. *Линейным интегралом от* $\mathbf{a}$ *по* Γ (*работой поля вдоль* Γ) называют интеграл

$$\int_\Gamma (\mathbf{a}, d\mathbf{r}) = \int_\Gamma a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz. \tag{16}$$

Если Γ — замкнутая кривая, то этот интеграл называют *циркуляцией поля* $\mathbf{a}$ *по* Γ.

Пусть S — кусочно гладкая ориентированная поверхность*) в Ω, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности, задающий ее ориентацию, $\mathbf{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. *Потоком векторного поля* $\mathbf{a}$ *через* S *в направлении* $\mathbf{n}$ называют интеграл

$$\iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n})\,dS = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS. \tag{17}$$

4. Интегральные формулы. Пусть u — непрерывно дифференцируемое скалярное поле в Ω, Γ — кусочно гладкая ориентированная кривая в Ω с началом A и концом B. Тогда

$$\int_\Gamma (\operatorname{grad} u, d\mathbf{r}) = \int_\Gamma (\nabla u, d\mathbf{r}) = u(B) - u(A). \tag{18}$$

Если кривая Γ лежит на поверхности уровня поля u, то работа поля $\operatorname{grad} u$ вдоль Γ равна нулю.

Пусть $\mathbf{a}$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле в области Ω, S — кусочно гладкая ориентированная единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ поверхность в Ω с краем ∂S, ориентированным согласованно с ориентацией поверхности (§ 11). Тогда по *формуле Стокса* (формула (14) § 11 с учетом формулы (10))

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a}\,dS = \iint_S (\mathbf{n}, [\nabla, \mathbf{a}])\,dS. \tag{19}$$

Таким образом, циркуляция поля $\mathbf{a}$ по краю поверхности S равна потоку ротора поля $\mathbf{a}$ через эту поверхность.

Пусть точка $M \in \Omega$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор. В плоскости, проходящей через M перпендикулярно $\mathbf{n}$, рассмотрим те ее области S, которые содержат M и для которых верна формула (19). Обозначим $d(S)$ — диаметр, μS — площадь S. Справедлива формула

$$\operatorname{rot}_{\mathbf{n}}\mathbf{a}(M) = \lim_{d(S)\to 0} \frac{1}{\mu S} \int_{\partial S} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}. \tag{20}$$

Здесь $\operatorname{rot}_{\mathbf{n}}\mathbf{a} = (\operatorname{rot}\mathbf{a}, \mathbf{n})$ — проекция $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{n}$.

При тех же предположениях о поверхности S, что и в формуле (19), для непрерывно дифференцируемых полей $\mathbf{a}$ и u верны фор-

---

*) В этом параграфе рассматриваются поверхности, ограниченные как множества в пространстве.

мулы

$$\iint_S [[\mathbf{n}, \nabla], \mathbf{a}]\, dS = -\oint_{\partial S} [\mathbf{a}, d\mathbf{r}], \tag{21}$$

$$\iint_S [\mathbf{n}, \nabla u]\, dS = \oint_{\partial S} u\, d\mathbf{r}. \tag{22}$$

Пусть G — ограниченная область, $\overline{G} \subset \Omega$, с кусочно гладкой границей ∂G, ориентированной внешней нормалью $\mathbf{n}$. По *формуле Гаусса–Остроградского* с учетом обозначения (9) имеем

$$\iint_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \iiint_G (\nabla, \mathbf{a})\, dV, \tag{23}$$

т. е. поток поля $\mathbf{a}$ через границу области равен интегралу от дивергенции поля $\mathbf{a}$ по этой области.

Пусть точка $M \in \Omega$, рассмотрим совокупность содержащих M областей $G \subset \Omega$, для которых справедлива формула (23). Пусть $d(G)$ — диаметр, μG — объем G. Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{d(G) \to 0} \frac{1}{\mu G} \iint_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS. \tag{24}$$

При тех же условиях на область G, что и в формуле (23), для непрерывно дифференцируемых полей $\mathbf{a}$, u и v и верны формулы

$$\iiint_G [\nabla, \mathbf{a}]\, dV = \iint_{\partial G} [\mathbf{n}, \mathbf{a}]\, dS, \tag{25}$$

$$\iiint_G \nabla u\, dV = \iint_{\partial G} \mathbf{n} u\, dS, \tag{26}$$

$$\iiint_G (\nabla u, \nabla v)\, dV = \iint_{\partial G} u(\mathbf{n}, \nabla v)\, dS - \iiint_G u\, \Delta v\, dV, \tag{27}$$

$$\iiint_G (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dV = \iint_{\partial G} (u\, \nabla v - v\, \nabla u, \mathbf{n})\, dS. \tag{28}$$

Равенства (27), (28) называют *формулами Грина*. Из них следует, что

$$\iiint_G |\nabla u|^2\, dV = \iint_{\partial G} u(\mathbf{n}, \nabla u)\, dS - \iiint_G u \Delta u\, dV, \tag{29}$$

$$\iiint_G \Delta u\, dV = \iint_{\partial G} (\mathbf{n}, \nabla u)\, dS. \tag{30}$$

5. Потенциальные и соленоидальные поля. Все поля в этом пункте считаем непрерывно дифференцируемыми.

Поле $\mathbf{a}$ в Ω называют *безвихревым*, если

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Поле $\mathbf{a}$ в Ω называют *потенциальным*, если существует на Ω скалярное поле u такое, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u. \tag{31}$$

Функцию u называют *потенциалом* поля $\mathbf{a}$.

Для потенциальности поля $\mathbf{a}$ в Ω необходимо и достаточно, чтобы его циркуляция по любому кусочно гладкому замкнутому контуру равнялась нулю:

$$\oint\limits_{\Gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0.$$

Если это условие выполнено, то потенциал поля определяется по формуле

$$u = \int\limits_{M_0}^{M} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \text{const}, \tag{32}$$

где M_0 — фиксированная точка Ω, интеграл берется по любой кусочно гладкой кривой, соединяющей M_0 и M.

Условие

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{33}$$

необходимо для потенциальности поля, но, вообще говоря, не достаточно.

Если область Ω односвязна, то условие (33) достаточно для потенциальности поля. Говорят, что область Ω *односвязна*, если любой принадлежащий ей кусочно гладкий замкнутый контур можно стянуть в точку этой области так, что во всех промежуточных положениях при стягивании контур будет оставаться в Ω (в этом случае говорят, что любой замкнутый контур *гомотопен точке*). Например, всякая выпуклая область односвязна.

В односвязной области безвихревое поле потенциально. Поле $\mathbf{a}$ в Ω называют *соленоидальным*, если для любой области $G \subset \Omega$ с кусочно гладкой границей ∂G поток поля $\mathbf{a}$ через эту границу равен нулю, т. е.

$$\iint\limits_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\,dS = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к ∂G.

Для соленоидальности поля необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{34}$$

Векторное поле $\mathbf{A}$ называют *векторным потенциалом* поля $\mathbf{a}$, если $\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Условие (34) необходимо, но, вообще говоря, не достаточно для существования векторного потенциала.

Любое гладкое поле $\mathbf{a}$ в Ω является суммой безвихревого и соленоидального полей (*теорема Гельмгольца*).

Потенциальное соленоидальное поле называют *гармоническим* (*лапласовым*). В односвязной области поле $\mathbf{a}$, у которого

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\mathbf{a} = 0,$$

гармонично.

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Пусть скалярное поле u, а также векторные поля $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ дифференцируемы на Ω, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор. Показать, используя правила действия с ∇, что:

1) $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}) + u \operatorname{div}\mathbf{a}$, т. е.

$$(\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla u, \mathbf{a}) + u(\nabla, \mathbf{a}); \tag{35}$$

2) $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b})$, т. е.

$$(\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]) - (\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]); \tag{36}$$

3) $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c} \operatorname{div}\mathbf{a} - (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}$, т. е.

$$[\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = \mathbf{c}(\nabla, \mathbf{a}) - (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}. \tag{37}$$

▲ 1) Сначала преобразуем выражение $(\nabla, u\mathbf{a})$ с учетом дифференциального характера ∇:

$$(\nabla, u\mathbf{a}) = (\nabla, \overset{\downarrow}{u}\, \mathbf{a}) + (\nabla, u\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}). \tag{38}$$

В первом слагаемом перенесем скаляр $\overset{\downarrow}{u}$ к ∇, не переставляя их:

$$(\nabla, \overset{\downarrow}{u}\, \mathbf{a}) = (\nabla\, \overset{\downarrow}{u}, \mathbf{a}).$$

Здесь ∇ соединен операцией (3) с u, поэтому опускаем метку:

$$(\nabla\, \overset{\downarrow}{u}, \mathbf{a}) = (\nabla u, \mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}).$$

Во втором слагаемом из (38) выносим скаляр u, переставляя его с ∇:

$$(\nabla, u\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = u(\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}),$$

и, поскольку ∇ соединен операцией (9) с вектором $\mathbf{a}$, опускаем метку:

$$(\nabla, u\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = u(\nabla, \mathbf{a}) = u \operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Складывая результаты, получаем равенство (35).

2) Имеем

$$(\nabla, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]) + (\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]).$$

Для первого слагаемого воспользуемся формулой циклической перестановки в смешанном произведении

$$(\mathbf{p}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\mathbf{p}, \mathbf{a}])$$

и получим

$$(\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}]).$$

Здесь ∇ соединен с $\mathbf{a}$ операцией (10), поэтому метку можно опустить:
$$(\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{b}, [\nabla, \mathbf{a}]) = (\mathbf{b}, \operatorname{rot} \mathbf{a}).$$

Во втором слагаемом сначала совершим перестановку
$$[\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}] = -[\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}, \mathbf{a}],$$
затем преобразуем его, как и первое, и получим
$$(\nabla, [\mathbf{a}, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]) = -(\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{b}}, \mathbf{a}]) = -(\mathbf{a}[\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{b}}]) = -(\mathbf{a}, [\nabla, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{b}).$$
Сложив результаты, придем к равенству (36).

3) Имеем
$$[\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = [\nabla, [\overset{\downarrow}{\mathbf{c}}, \mathbf{a}]] + [\nabla, [\mathbf{c}, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}]].$$

Поскольку $\mathbf{c} = \mathrm{const}$, результат действия ∇ на $\mathbf{c}$ есть нуль, поэтому и первое слагаемое равно нулю. Для второго слагаемого воспользуемся формулой преобразования двойного векторного произведения
$$[\mathbf{p}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = (\mathbf{p}, \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{p}, \mathbf{c})\mathbf{a}.$$

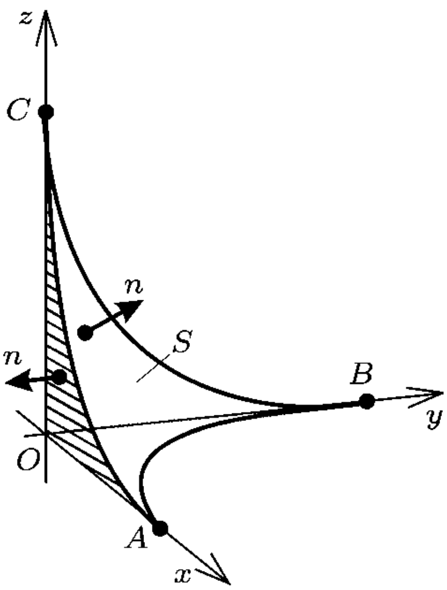

Рис. 12.1

Получим
$$[\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = [\nabla, [\mathbf{c}, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}]] = (\nabla, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}})\mathbf{c} - (\nabla, \mathbf{c})\, \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}\,.$$
Переставив ∇ и $\mathbf{c}$ в произведении $(\nabla, \mathbf{c})$ (это будет символ вида (7)), придем к требуемому результату:
$$[\nabla, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] = (\nabla, \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{c}, \nabla)\mathbf{a}. \ \blacktriangle$$

Пример 2. Найти поток поля $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ через поверхность $S = \{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{r}\}$, нормаль на которой направлена от начала координат.

$\blacktriangle$ Очевидно, $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$. Воспользуемся теоремой Гаусса–Остроградского. Рассмотрим область G — “криволинейный тетраэдр” $OABC$ (рис. 12.1). Часть его границы, лежащую в плоскости Oxy, обозначим S_1, в плоскости Oyz — S_2, в плоскости Ozx — S_3. Потоки поля $\mathbf{a}$ через S, S_1, S_2, S_3 (нормаль — внешняя к G) обозначим соответственно Π, Π_1, Π_2, Π_3. По теореме Гаусса–Остроградского
$$\iint\limits_{\partial G} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS = \iiint\limits_{G} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = 0,$$
т. е. $\Pi + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 0$, а $\Pi = -(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)$.

Вычислим, например, Π_3:
$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS.$$

Здесь $\mathbf{n} = (0; -1; 0)$, $\mathbf{a} = z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$. За параметры на S_3 — криволинейном треугольнике AOC — возьмем x и z. Дуга AC задается уравнением $\sqrt{x}+\sqrt{z}=\sqrt{r}$, т. е. $x=(\sqrt{r}-\sqrt{z})^2$, $0\leqslant z\leqslant r$. Находим

$$\Pi_3=\iint\limits_{OAC}(-z)\,dx\,dz=-\int\limits_0^r z\,dz\int\limits_0^{(\sqrt{r}-\sqrt{z})^2}dx=-\frac{r^3}{30}.$$

Таковы же Π_1 и Π_2. Следовательно, $\Pi=3\cdot r^3/30=r^3/10$. ▲

Пример 3. Доказать формулу (27).

▲ По формуле (35), полагая $\mathbf{a}=\nabla v$, получаем

$$\operatorname{div}(u\,\nabla v)=(\nabla u,\nabla v)+u(\nabla,\nabla v).$$

Отсюда, учитывая, что $(\nabla,\nabla v)=\operatorname{div}\operatorname{grad}v=\Delta v$, находим

$$(\nabla u,\nabla v)=\operatorname{div}(u\nabla v)-u\,\Delta v,$$

и, следовательно,

$$\iiint\limits_G(\nabla u,\nabla v)\,dV=\iiint\limits_G\operatorname{div}(u\nabla v)\,dV-\iiint\limits_G u\,\Delta v\,dV.$$

Полагая $\mathbf{a}=u\,\nabla v$ и применяя к первому слагаемому правой части формулу (23), получаем (27). ▲

Пример 4. Пусть γ — часть линии пересечения эллипсоида $x^2+y^2/4+z^2=1$ с цилиндром $x^2+y^2=1$, лежащая в замкнутой

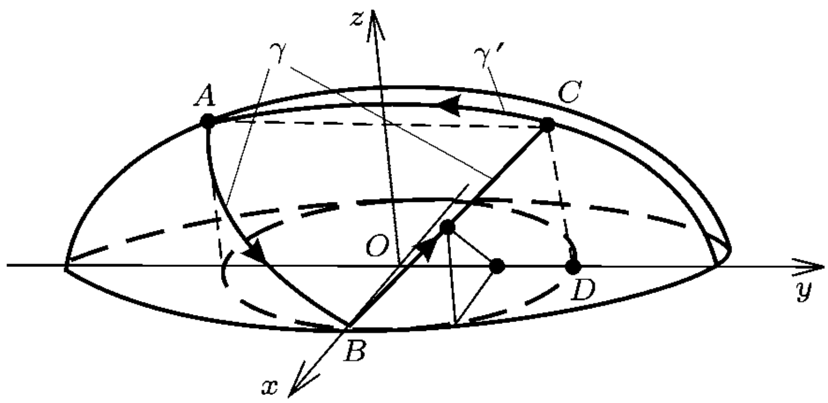

Рис 12.2

области $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ (рис. 12.2) и ориентированная по возрастанию ординат точек. Найти работу поля $\mathbf{a}=y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$:

1) вдоль γ; 2) вдоль γ_1 — части γ, лежащей в первом октанте.

▲ 1) Легко найти, что $\operatorname{rot}\mathbf{a}=0$. Воспользуемся формулой Стокса (19). Замкнем γ дугой $\gamma'=AC$ (см. рис. 12.2), лежащей в пересечении эллипсоида с плоскостью Oyz. Контур $\Gamma=ABCA$ — это край части S поверхности эллипсоида. По формуле (19)

$$\int\limits_\Gamma\mathbf{a}\,d\mathbf{r}=\int\limits_S(\mathbf{n},\operatorname{rot}\mathbf{a})\,dS=0.$$

Отсюда

$$\int\limits_\gamma\mathbf{a}\,d\mathbf{r}+\int\limits_{\gamma'}\mathbf{a}\,d\mathbf{r}=0.$$

Дугу γ' замкнем отрезком AC, направленным от A к C. Получившийся контур служит краем части плоскости Oyz. Из того, что $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$, как и выше, получаем

$$\int_{\gamma'} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int_{AC} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0.$$

На отрезке AC

$$\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{k}, \quad d\mathbf{r} = (0; dy; 0),$$

поэтому

$$\mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{AC} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0.$$

Отсюда следует, что и

$$\int_{\gamma'} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0, \quad \int_{\gamma} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0.$$

2) Способ I. Вычислим работу по γ' непосредственно, используя параметризацию γ'. Полагая

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2,$$

из уравнения эллипсоида получаем $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\sin\varphi$. Тогда на γ'

$$\mathbf{a} = \sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin\varphi\,\mathbf{k},$$

$$d\mathbf{r} = \Big(-\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos\varphi\,\mathbf{k}\Big)\,d\varphi,$$

поэтому

$$\int_{\gamma'} = \int_0^{\pi/2} \Big(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \frac{3}{4}\,\sin\varphi\cos\varphi\Big)\,d\varphi = \frac{3}{8}.$$

Способ II. Контур γ взаимно однозначно проектируется на ось Oy. Опустим перпендикуляры из точек контура на эту ось. Они образуют гладкую поверхность, край которой состоит, кроме γ', еще из ломаной $CDOB$. Используя формулу (19) и то, что $\operatorname{rot}\mathbf{a} = \mathbf{0}$, получаем

$$\int_{\gamma'} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int_{CD} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int_{DO} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} + \int_{OB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0.$$

На OB $\mathbf{a} = x\,\mathbf{j}$, $d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx$, поэтому

$$\mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0 \quad \text{и} \quad \int_{OB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0.$$

Аналогично, $\displaystyle\int_{DO} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0$. Поэтому

$$\int_{\gamma'} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = -\int_{CD} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int_{DC} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}.$$

На DC $\mathbf{a} = \mathbf{i} + z\,\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = \mathbf{k}\,dz$, поэтому

$$\int_{CD} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int_0^{\sqrt{3}/2} z\,dz = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, как и ранее, $\displaystyle\int_{\gamma'} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \frac{3}{8}$. ▲

ЗАДАЧИ

1. Найти поверхность уровня поля $u = x^2 - y^2 + z^2$, содержащую точку: а) $(1;1;1)$; б) $(1;2;1)$.

2. Написать уравнение нормали в точке $(2;2;-2)$ к поверхности уровня поля $u = \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2})$, проходящей через эту точку.

3. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{r} = (x;y;z)$. Найти поверхность уровня поля:

1) $u = \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{r})}{(\mathbf{b},\mathbf{r})}$; 2) $u = e^{(\mathbf{a},\,\mathbf{b},\,\mathbf{r})}$.

4. Найти поверхности уровня поля $u = \sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} + \sqrt{((x-1)^2+y^2+z^3}$ и $\max u$ на сфере $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

5. Найти поверхности уровня поля $u = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $\max u$, $\min u$ в шаре $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\sqrt{2})^2 \leqslant 1$.

6. Найти $\operatorname{grad} u(M_0)$, если:

1) $u = xy + yz + zx$; $M_0(1;1;1)$;

2) $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$; $M_0(1;1;-1)$;

3) $u = 9(x+y+z)/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $M_0(1;-2;-2)$;

4) $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$; $M_0(0;0;0)$.

7. В каких точках $\operatorname{grad}(x + y^2 + 18z^3 - 3xyz)$:

а) перпендикулярен оси Oz;

б) параллелен оси Oz; в) равен нулю?

8. Найти угол между $\operatorname{grad} u(M_1) \operatorname{arctg}(x/(y+x))$ и $\operatorname{grad} u(M_2)$, если:

1) $u = (x+y)e^{x+y}$; $M_1(0;0)$, $M_2(1;1)$;

2) $u = \operatorname{arctg}(x/(y+z))$; $M_1(1;1;0)$, $M_2(-1;0;1)$;

3) $u = x/(x^2+y^2+z^2)$; $M_1(1;2;2)$, $M_2(-3;1;0)$;

4) $u = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $M_1(3;\sqrt{3};-2)$, $M_2(\sqrt{3};1;2\sqrt{3})$.

9. На поверхности уровня поля $u = x/(x^2+y^2+z^2)$, проходящей через точку $(1;1;1)$, найти наименьшее значение $|\operatorname{grad} u|$.

10. Найти $\inf|\operatorname{grad} u|$ и $\sup|\operatorname{grad} u|$ в области $1 < z < 2$, если $u = z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

11. Пусть u и v — дифференцируемые поля, α и β — числа.

Доказать, что:

1) $\operatorname{grad}(u+v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$; 2) $\operatorname{grad}(\alpha u) = \alpha \operatorname{grad} u$;

3) $\operatorname{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha \operatorname{grad} u + \beta \operatorname{grad} v$;

4) $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;

5) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$, $v \neq 0$.

12. Указать в R^3 такие дифференцируемые поля u и v, что векторы ∇u и ∇v не коллинеарны ни в одной точке (для обычного вектора $\mathbf{p}$ векторы $\mathbf{p}u$ и $\mathbf{p}v$ обязательно коллинеарны).

13. Пусть u — дифференцируемое поле, $f(t)$ — дифференцируемая функция, $t \in R$. Доказать, что

$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u.$$

14. Пусть u и v — дифференцируемые поля, $f(t;s)$ — дифференцируемая функция, $(t;s) \in R^2$. Доказать, что

$$\operatorname{grad} f(u;v) = \frac{\partial f}{\partial t}(u;v) \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial s}(u;v) \operatorname{grad} v.$$

15. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$, $r = |\mathbf{r}|$.

Найти $\operatorname{grad} u$, если:

1) $u = r$; 2) $u = \mathbf{r}^2$; 3) $u = 1/r$; 4) $u = \ln r$; 5) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$;

6) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$; 7) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})(\mathbf{b}, \mathbf{r})$; 8) $u = |[\mathbf{a}, \mathbf{r}]|^2$.

16. Доказать, что $\operatorname{grad} u(M)$ перпендикулярен поверхности уровня поля u, проходящей через точку M.

17. Пусть u — непрерывно дифференцируемое поле, $u_0 = u(M_0)$, $\nabla u(M_0) \neq 0$; l_0 — нормаль в точке M_0 к поверхности уровня $u = u_0$.

1) Доказать, что существуют такие окрестность точки M_0 и число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех ε, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, в этой окрестности есть только одна точка пересечения $M = M(\varepsilon)$ нормали l_0 с поверхностью уровня $u = u_0 + \varepsilon$;

2) найти длину отрезка MM_0 с точностью до $o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

18. Пусть $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиус-векторы двух фиксированных точек, $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z+z_j)^2}, \quad j = 1, 2,$$

$$u = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|.$$

Доказать, что $\operatorname{grad} u$ в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$ составляет равные углы с векторами $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Объяснить, используя это, оптическое свойство эллипсоида.

19. Пусть функция $f(r)$ дифференцируема, $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$, $r = |\mathbf{r}|$.

Доказать, что $\nabla f(r) = f'(r)\,\dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

20. Пусть вектор-функции $\mathbf{a}(r)$ и $\mathbf{b}(r)$ дифференцируемы, $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$, $r = |\mathbf{r}|$. Доказать, что:

1) $\nabla(\mathbf{a}(r), \mathbf{r}) = \mathbf{a}(r) + (\mathbf{a}'(r), \mathbf{r})\,\dfrac{\mathbf{r}}{r}$;

2) $\nabla(\mathbf{a}(r), \mathbf{b}(r)) = ((\mathbf{a}', \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}'))\,\dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

21. Выразить $\operatorname{grad} u$:

1) в цилиндрических координатах r, φ, z;

2) в сферических координатах r, φ, ψ, используя соответствующие орты $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\psi$, касательные к координатным линиям.

22. Проверить, что вектор $\operatorname{grad} u$ не зависит от выбора декартовой системы координат.

23. Доказать, что для дважды дифференцируемых полей u и v

$$\Delta(uv) \equiv \nabla^2(uv) = v\,\nabla^2 u + 2(\nabla u, \nabla v) + u\,\nabla^2 v.$$

24. Найти производную поля u по направлению единичного вектора $\mathbf{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, если $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mathbf{r} = (x; y; z)$:

1) $u = r$; 2) $u = 1/r$; 3) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$, $\mathbf{a} = \mathrm{const}$; 4) $u = f(r)$.

25. Найти производную поля $u = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2$ в точке $M(x; y; z)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

26. Пусть u и v — дифференцируемые поля. Найти производную поля u по направлению вектора $\operatorname{grad} v$.

27. По какой кривой следует двигаться из точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, чтобы поле $u = x^2/2 + y^2 - z^2$ имело наибыстрейшее убывание, если:

а) $M_0(1; 1; 0)$; б) $M_0(1; 1; 1)$?

28. Найти линии наибыстрейшего изменения плоских полей:

1) $u = x^2 - y^2$; 2) $u = xy$; 3) $u = x^2/2 + y^2$; 4) $u = y^2/x$.

29. Найти линии наибыстрейшего изменения трехмерных полей:

1) $u = x^2 + 2y^2 + z^2$; 2) $u = x^2 + y^2 + z^2$; 3) $u = xyz$.

30. Пусть в звездной *) относительно точки A области Ω задано гладкое поле u и $|\nabla u| \leqslant c$. Доказать, что для любой точки $B \subset \Omega$

$$|u(B) - u(A)| \leqslant c|B - A|,$$

где $|B - A|$ — расстояние между A и B. Для выпуклой области доказать справедливость этого неравенства для любых A и B из Ω.

Найти векторные линии поля $\mathbf{a}$ (31, 32).

31. 1) $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a} = z\,\mathbf{j} - y\,\mathbf{k}$; 3) $\mathbf{a} = 2x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$;

4) $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$; 5) $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$.

---

*) Область называют *звездной* относительно точки A, если для любой точки B этой области отрезок AB принадлежит области.

32. 1) $\mathbf{a} = \mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$; 2) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \text{const}$;
3) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$, $r = |\mathbf{r}|$;
4) $\mathbf{a} = [\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, $\mathbf{c} = \text{const}$, $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$;
5) $\mathbf{a} = (\mathbf{b}, \mathbf{r})\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — постоянные векторы, $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$;
6) $\mathbf{a} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$; 7) $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

33. Найти векторную линию поля $\mathbf{a}$, проходящую через точку M, если:
1) $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $c = \text{const}$, $M(1; 0; 0)$;
2) $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} - y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; $M(1/2; -1/2; 1)$;
3) $\mathbf{a} = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$; $M(1; 1; 0)$.

34. Найти векторные линии напряженности магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника постоянного тока.

35. Для поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ найти уравнение векторной трубки, содержащей окружность $z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.

36. Для поля $\mathbf{a} = \mathbf{j}/z - \mathbf{k}/y$ найти векторную трубку, содержащую кривую $y = z$, $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$.

37. Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать их и проверить, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β — числа, u, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — дифференцируемые скалярное и векторные поля):
1) $\operatorname{div}(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha \operatorname{div}\mathbf{a} + \beta \operatorname{div}\mathbf{b}$;
2) $\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}) + u \operatorname{div}\mathbf{a}$.

38. Полагая $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, найти $\operatorname{div}\mathbf{a}$, если:
1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; 2) $\mathbf{a} = r\mathbf{r}$; 3) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r$; 4) $\mathbf{a} = (-x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2}$;
5) $\mathbf{a} = (6x^2y^2 - z^3 + yz - 5)\mathbf{i} + (4x^3 + xz + 2)\mathbf{j} + (xy - 3xz^2 - 3)\mathbf{k}$.

39. Выразить в координатной форме $\operatorname{div}\operatorname{grad} u$.

40. Найти:
1) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; 2) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

41. Найти ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$):
1) $\operatorname{div}\operatorname{grad} r^2$; 2) $\operatorname{div}\operatorname{grad}(1/r)$; 3) $\operatorname{div} r\mathbf{c}$, $\mathbf{c} = \text{const}$; 4) $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{r})$;
5) $\operatorname{div}\operatorname{grad} f(r)$; 6) $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{c})$, $\mathbf{c} = \text{const}$; 7) $\operatorname{div}[\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, $\mathbf{c} = \text{const}$;
8) $\operatorname{div}[\mathbf{r}, [\mathbf{c}, \mathbf{r}]]$, $\mathbf{c} = \text{const}$.

42. Решить уравнение ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$):
1) $\operatorname{div}(u(r)\mathbf{r}) = 0$; 2) $\operatorname{div}\operatorname{grad} u(r) = 0$; 3) $\operatorname{div}(u(r)\mathbf{r}) = \lambda u(r)$, $\lambda \neq 3$.

43. Найти дивергенцию гравитационного поля нескольких точечных масс.

44. Среда вращается как твердое тело вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти в фиксированный момент времени дивергенцию поля линейных скоростей $\mathbf{v}$ и поля ускорений $\mathbf{w}$ точек среды.

45. Доказать, что $\operatorname{div}\mathbf{a}$ не зависит от выбора декартовой системы координат.

46. Найти $\operatorname{div}\mathbf{a}$ плоского поля $\mathbf{a}$ в полярных координатах.

47. Найти $\operatorname{div}\mathbf{a}$ трехмерного поля:

1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах.

48. Найти $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$:

1) $\operatorname{div}\mathbf{a}(r)$; 2) $\operatorname{div}(u(r)\mathbf{a}(r))$.

49. Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать и проверить их, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β — числа, u, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — дифференцируемые скалярное и векторные поля, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор):

1) $\operatorname{rot}(\alpha\,\mathbf{a}+\beta\,\mathbf{b})=\alpha\operatorname{rot}\mathbf{a}+\beta\operatorname{rot}\mathbf{b}$; 2) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{c})=[\operatorname{grad}u,\mathbf{c}]$;

3) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a})=u\operatorname{rot}\mathbf{a}+[\operatorname{grad}u,\mathbf{a}]$; 4) $\operatorname{rot}[\mathbf{c},\mathbf{a}]=\mathbf{c}\operatorname{div}\mathbf{a}-(\mathbf{c},\nabla)\,\mathbf{a}$;

5) $\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}-\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}+(\mathbf{b},\nabla)\,\mathbf{a}-(\mathbf{a},\nabla)\,\mathbf{b}$;

6) $\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{b}]=(\mathbf{b},\operatorname{rot}\mathbf{a})-(\mathbf{a},\operatorname{rot}\mathbf{b})$.

50. Найти ($\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, $r=|\mathbf{r}|$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $u(r)$ — дифференцируемое поле):

1) $\operatorname{rot}\mathbf{r}$; 2) $\operatorname{rot}(r\mathbf{a})$; 3) $\operatorname{rot}((\mathbf{r},\mathbf{a})\mathbf{b})$; 4) $\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{a})$; 5) $\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{r})$.

51. Вычислить $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в точке M_0, если:

1) $\mathbf{a}=xyz\,\mathbf{i}+(2x+3y-z)\,\mathbf{j}+(x^2+z^2)\,\mathbf{k}$; $M_0(1;3;2)$;

2) $\mathbf{a}=\dfrac{y}{z}\,\mathbf{i}+\dfrac{z}{x}\,\mathbf{j}+\dfrac{x}{y}\,\mathbf{k}$; $M_0(1;2;-2)$.

52. Для любого вектора $\mathbf{p}$ векторы $[\mathbf{p},\mathbf{a}]$ и $\mathbf{a}$ перпендикулярны (если они не нулевые). Верно ли это для векторов $[\nabla,\mathbf{a}]$ и $\mathbf{a}$?

53. Найти угол между $\operatorname{rot}\mathbf{a}\,(M_1)$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}\,(M_2)$, если:

1) $\mathbf{a}=(x^2+y^2)\,\mathbf{i}+(y^2+z^2)\,\mathbf{j}+(z^2+x^2)\,\mathbf{k}$;
$M_1(1;2;3)$, $M_2(1;1;-1)$;

2) $\mathbf{a}=z^3\,\mathbf{i}+(x^3+y^3)\,\mathbf{j}+xyz\,\mathbf{k}$; $M_1(1;2;0)$, $M_2(1;12;4)$.

54. Найти:

1) $\operatorname{rot}[\mathbf{c},\mathbf{r}]$, $\mathbf{c}=\mathrm{const}$; 2) $\operatorname{rot}[\mathbf{r},[\mathbf{c},\mathbf{r}]]$, $\mathbf{c}=\mathrm{const}$.

55. Проверить в координатной форме:

1) формулу (14); 2) формулу (15).

56. Равенство $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}-\Delta\mathbf{a}$ проверить в координатной форме, а также записать и получить его, используя символ ∇ и правила действия с ним.

57. Найти $\operatorname{rot}\operatorname{grad}(1/r)$.

58. Получить формулы:

1) $\nabla(\nabla,u\,\mathbf{c})=(\mathbf{c},\nabla)\nabla u$, $\mathbf{c}=\mathrm{const}$;

2) $\nabla(\nabla,u\,\mathbf{a})=u\nabla(\nabla,\mathbf{a})+(\nabla,\mathbf{a})\nabla u+[\nabla u,[\nabla,\mathbf{a}]]+(\nabla u,\nabla)\mathbf{a}+$
$+(\mathbf{a},\nabla)\nabla u$;

3) $[\nabla, [\nabla u, \mathbf{c}]] = (\mathbf{c}, \nabla)\nabla u - \mathbf{c}\,\Delta u.$

59. Показать, что:

1) $\operatorname{div}[\nabla u, \nabla v] = 0$;

2) векторы $\mathbf{a} = u \operatorname{grad} v$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ перпендикулярны.

60. Найти компоненты $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ плоского поля $\mathbf{a}$ в полярных координатах.

61. Найти компоненты $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ трехмерного поля $\mathbf{a}$:

1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах.

62. Найти $\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{a}(r))$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

63. Записать $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$:

1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах.

64. Среда вращается как твердое тело вокруг оси с постоянной угловой скоростью ω. Пусть $\mathbf{v}$ — поле линейных скоростей точек в фиксированный момент времени. Найти $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ (воспользоваться цилиндрическими координатами).

65. В простейшем случае система уравнений Максвелла электромагнитного поля имеет вид

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = [\nabla, \mathbf{H}], \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = [\nabla, \mathbf{E}], \ (\nabla, \mathbf{E}) = 0, \quad (\nabla, \mathbf{H}) = 0.$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторные поля электрической и магнитной напряженности, ε, μ, $c = \mathrm{const} > 0$. Полагая все функции достаточно гладкими, доказать, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,\Delta\mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\,\Delta\mathbf{H}.$$

66. Пусть в области Ω введена ортогональная система криволинейных координат $(\xi;\eta;\zeta)$:

$$x = x(\xi;\eta;\zeta), \quad y = y(\xi;\eta;\zeta), \quad z = z(\xi;\eta;\zeta),$$

где правые части — непрерывно дифференцируемые функции. Пусть $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$ — единичные орты этой системы (векторы, касательные к координатным линиям и направленные по возрастанию координат, $\mathbf{e}_\xi \perp \mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\eta \perp \mathbf{e}_\zeta$, $\mathbf{e}_\zeta \perp \mathbf{e}_\xi$) *). Пусть H_ξ, H_η, H_ζ — коэффициенты Ламэ, т. е. $H_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$ и т. д. Доказать, что:

1) $$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_\xi}\frac{\partial u}{\partial \xi}\mathbf{e}_\xi + \frac{1}{H_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\mathbf{e}_\eta + \frac{1}{H_\zeta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\mathbf{e}_\zeta; \qquad (39)$$

2) $$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta}\left(\frac{\partial(H_\eta H_\zeta a_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_\zeta H_\xi a_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(H_\xi H_\eta a_\zeta)}{\partial \zeta}\right); \qquad (40)$$

---

*) Все ортонормированные базисы исходной и вводимой систем координат положительно ориентированы (правые), в частности, якобиан функций, задающих криволинейную систему координат, положителен.

$$3)\ \operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\zeta}\begin{vmatrix} H_\xi \mathbf{e}_\xi & H_\eta \mathbf{e}_\eta & H_\zeta \mathbf{e}_\zeta \\ \dfrac{\partial}{\partial\xi} & \dfrac{\partial}{\partial\eta} & \dfrac{\partial}{\partial\zeta} \\ H_\xi a_\xi & H_\eta a_\eta & H_\zeta a_\zeta \end{vmatrix}. \tag{41}$$

67. Пользуясь формулами (39)–(41), получить выражения для $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$:

1) в цилиндрических координатах; 2) в сферических координатах.

Найти поток поля $\mathbf{a}$ через ориентированную нормалью $\mathbf{n}$ поверхность S $(\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|)$ (68, 69).

68. 1) $\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$, где $a_x,\ a_y,\ a_z = \text{const}$, S — круг радиуса R, лежащий в плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = d$;

2) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, S — внешняя сторона конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h$;

3) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, S — внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$;

4) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$, S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

5) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$, S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

69. 1) $\mathbf{a} = (x - 2z; x + 3y + z; 5x + y)$; S — противоположная началу координат сторона плоского треугольника с вершинами $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$;

2) $\mathbf{a} = (x^2; y^2; z^2)$; S — внешняя сторона полной поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

3) $\mathbf{a} = (y^2; x^2; z^2)$; S — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, расположенная в первом октанте между плоскостями $z = 0$ и $z = a$, $a > 0$;

4) $\mathbf{a} = (0; y^2; z)$; S — ограниченная часть внешней стороны параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченная плоскостью $z = 2$;

5) $\mathbf{a} = (x; y; \sqrt{x^2 + y^2 - 1})$; S — часть внешней стороны гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = \sqrt{3}$;

6) $\mathbf{a} = (y; z; x)$; S — часть внутренней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$; расположенная в области $x > |z|$;

7) $\mathbf{a} = (3x; -y; -z)$; S — часть внешней стороны параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, расположенная в первом октанте;

8) $\mathbf{a} = (xy; yz; zx)$; S — часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенная в первом октанте;

9) $\mathbf{a} = (xz; yz; z^2)$; S — часть внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, расположенная в области $z > 2$;

10) $\mathbf{a} = (x; y; xyz)$; S — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, расположенная в области $x > |y|$ и отсеченная плоскостью $z = 0$ и параболоидом $z = x^2 - y^2$;

11) $\mathbf{a} = (xy - y^2; -x^2 + xy + 2x; z)$; S — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, отсеченная конусом $z^2 = x^2/2 + y^2$.

70. Найти поток поля $\mathbf{a}$ через поверхность S непосредственно или по теореме Гаусса–Остроградского, если:

1) $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$, S — внешняя поверхность куба $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < a$;

2) $\mathbf{a} = (z - y)\,\mathbf{i} + (x - z)\,\mathbf{j} + (y - x)\,\mathbf{k}$; S — полная внешняя поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$, $x + y - z = 1$, $y = 0$, $x = 0$;

3) $\mathbf{a} = y^2 z\,\mathbf{i} - yz^2\,\mathbf{j} + x(y^2 + z^2)\,\mathbf{k}$; S — полная внешняя поверхность цилиндра $y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant x \leqslant a$;

4) $\mathbf{a} = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$; S — полная внешняя поверхность конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant H$;

5) $\mathbf{a} = (x + z)\,\mathbf{i} + (y + x)\,\mathbf{j} + (z + y)\,\mathbf{k}$; S — внешняя поверхность тела $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant y$;

6) $\mathbf{a} = x^2 y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$; S — внешняя поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

7) $\mathbf{a} = x^2 yz\,\mathbf{i} + xy^2 z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$; S — часть внешней стороны эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, расположенная в первом октанте;

8) $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$; S — половина внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$;

9) $\mathbf{a} = (z^n - y^n)\,\mathbf{i} + (x^n - z^n)\,\mathbf{j} + (y^n - x^n)\,\mathbf{k}$; S — половина внешней стороны сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

71. Пусть $A(\mathbf{r}) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j$ — положительно определенная квадратичная форма, $\mathbf{r} = x_1\,\mathbf{i} + x_2\,\mathbf{j} + x_3\,\mathbf{k}$. Найти поток поля $\mathbf{a} = \mathbf{r} \cdot (A(\mathbf{r}))^{-3/2}$ через единичную сферу $|\mathbf{r}| = 1$.

72. Указать с точностью до $o(\varepsilon^3)$ приближенное значение потока поля $\mathbf{a}$:

1) из задачи 38, 4) через внешнюю сторону сферы с центром $(3; 4; 0)$ и радиусом ε;

2) из задачи 38, 5) через внешнюю сторону поверхности куба с центром $(1; 1; 2)$ и ребром длины ε.

73. Доказать формулу (24).

74. Пусть поле $\mathbf{a}$ непрерывно дифференцируемо в Ω, G — произвольная область с кусочно гладкой границей, $\overline{G} \subset \Omega$. Доказать, что поток $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ через ∂G равен нулю.

75. Пусть ограниченная область G имеет кусочно гладкую границу ∂G, ориентированную внешней нормалью. Доказать, что поток радиус-вектора $\mathbf{r}$ через ∂G равен $3\mu G$, где μG — объем G.

76. Пусть кусочно гладкая граница ∂G области G, ориентирована нормалью $\mathbf{n}$, c — постоянный вектор. Доказать, что

$$\iint_{\partial G} \cos(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{c}})\, dS = 0.$$

77. Доказать формулы: 1) (25); 2) (26); 3) (28); 4) (29); 5) (30).

78. Пусть поле u дважды непрерывно дифференцируемо в Ω, G — область из Ω такая, что $\overline{G} \subset \Omega$ и граница ∂G является поверхностью уровня поля u. Доказать, что

$$\iiint_G \Delta u\, dV = \pm \iint_{\partial G} |\nabla u|\, dS,$$

где следует выбрать один из знаков. Объяснить выбор знака.

79. Доказать, что

$$\iiint_G (\nabla u, [\nabla, \mathbf{a}])\, dV = \iint_{\partial G} (\mathbf{a}, \nabla u, \mathbf{n})\, dS.$$

80. Пусть u и $\mathbf{a}$ — непрерывно дифференцируемые поля в Ω, G — область из Ω, $\overline{G} \subset \Omega$, ∂G — кусочно гладкая поверхность, ориентированная внешней нормалью. Доказать, что

$$\iint_{\partial G} (u\,\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS = \iiint_G (u(\nabla, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \nabla u))\, dV.$$

81. Пусть S — гладкая поверхность, ориентированная нормалью $\mathbf{n}$, и пусть замыкание S не содержит начала координат. Показать, что интеграл

$$\iint_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{r^2}\, dS$$

есть поток некоторого поля через S.

82. Пусть G — ограниченная область с кусочно гладкой границей, ориентированной внешней нормалью $\mathbf{n}$, $O \notin \overline{G}$, $\mathbf{r} = (x; y; z)$, $r = |\mathbf{r}|$.

Доказать, что:

1) $\displaystyle\iiint_G \frac{1}{r}\, dV = \frac{1}{2} \iint_{\partial G} \cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})\, dS;$

2) $\displaystyle\iiint_G \frac{1}{r^p}\, dV = \frac{1}{3-p} \iint_{\partial G} \frac{\cos(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{r}})}{r^{p-1}}\, dS, \ \ p \neq 3.$

83. Пусть ограниченная область G имеет кусочно гладкую границу ∂G, ориентированную внешней нормалью, M_0 — фиксированная точка G,

$$\mathbf{a}(M) = \overline{M_0 M}/|M_0 M|^3,$$

$S_\varepsilon(M_0)$ — сфера с центром M_0 и радиусом ε, лежащая в G, ориентированная внешней нормалью. Доказать, что поток $\mathbf{a}$ через ∂G равен потоку a через $S_\varepsilon(M_0)$.

84. Пусть ограниченная область G имеет кусочно гладкую границу ∂G, ориентированную внешней нормалью, M_0 — фиксированная

точка,
$$\mathbf{a}(M) = \overline{M_0M}/|M_0M|^3.$$

Найти поток поля $\mathbf{a}$ через ∂G, если: 1) $M_0 \notin \overline{G}$; 2) $M_0 \in G$.

85. В условиях задачи 83 пусть $M_0 \in \partial G$ и в окрестности M_0 граница ∂G дважды непрерывно дифференцируема. Пусть ∂G_ε — часть границы ∂G, лежащая внутри шара $|\overline{M_0M}| \leqslant \varepsilon$, а Π_ε — поток поля $\mathbf{a}$ через $\partial G \setminus \partial G_\varepsilon$. Найти $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Pi_\varepsilon$.

86. Сформулировать аналог теоремы Гаусса–Остроградского для плоских областей и полей.

87. Пусть γ — гладкая плоская простая (с. 295) кривая, замыкание которой не содержит начала координат, $\mathbf{n}$ — непрерывная единичная нормаль к γ. Показать, что интеграл Гаусса
$$\int\limits_\gamma \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r}\,ds$$
есть поток некоторого поля через γ.

88. Пусть в условиях задачи 87 γ есть граница ограниченной области G. Вычислить интеграл Гаусса, если:

1) $O \notin \overline{G}$; 2) $O \in G$.

89. Покажите, что значение интеграла Гаусса из задачи 87 равно полярному углу, под которым видна кривая γ из начала координат.

Найти работу поля $\mathbf{a}$ вдоль прямой от точки $A(\mathbf{r}_1)$ до точки $B(\mathbf{r}_2)$ $(r = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|)$ (90, 91).

90. 1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r$; 3) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$;

4) $a = f(r)\mathbf{r}$, $f(r)$ — непрерывная функция, $r \geqslant 0$;

5) $\mathbf{a} = [\mathbf{c},\mathbf{r}]$, $\mathbf{c} = \text{const}$.

91. 1) $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{i}}{y+z} + \dfrac{\mathbf{j}}{z+x} + \dfrac{\mathbf{k}}{x+y}$; $A(-1;0;3)$, $B(0;-1;2)$;

2) $\mathbf{a} = \mathbf{i}\,e^{y-z} + \mathbf{j}\,e^{z-x} + \mathbf{k}\,e^{x-y}$; $A(0;0;0)$, $B(1;3;2)$;

3) $\mathbf{a} = (y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k})/\sqrt{x^2 - y^2 + z^2 - x + z}$; $A(1;1;1)$, $B(6;6;6)$.

92. Вычислить работу плоского поля $\mathbf{a}$ вдоль кривой γ, если:

1) $\mathbf{a} = (x+y)\,\mathbf{i} + (x-y)\,\mathbf{j}$; γ — часть графика $y = |x|$ от точки $(-1;1)$ до точки $(2;2)$;

2) $\mathbf{a} = (y^2\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j})/\sqrt{x^2+y^2}$; γ — полуокружность $x^2 + y^2 = 1$ от точки $(1;0)$ до точки $(-1;0)$ в области $y > 0$;

3) $\mathbf{a} = f(x)\,\mathbf{i} + f(y)\,\mathbf{j}$; γ — дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ от точки $(1;0)$ до точки $(0;1)$, расположенная в первом квадранте ($f(x)$ — непрерывная функция).

93. Вычислить работу поля $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ от точки $A(a;0;0)$ до точки $B(a;0;2\pi b)$:

1) вдоль винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$;

2) вдоль отрезка AB.

Является ли данное поле потенциальным?

94. Найти по формуле Стокса (19) циркуляцию поля $\mathbf{a}$ вдоль контура Γ, ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если:

1) $\mathbf{a} = z^2\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$; $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$;

2) $\mathbf{a} = (y + z)\,\mathbf{i} + (z + x)\,\mathbf{j} + (x + y)\,\mathbf{k}$; $\Gamma = \{4(x^2 + y^2) = z^2,\ x + y + z = 1\}$;

3) $\mathbf{a} = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$; $\Gamma = \{z = x^2 + y^2,\ z + y = 2\}$;

4) $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0\}$;

5) $\mathbf{a} = z^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$; $\Gamma = \{y^2 + z^2 = 9,\ 3z + 4x = 5\}$;

6) $\mathbf{a} = zx\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$; $\Gamma = \{y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$.

95. Для поля $\mathbf{a} = -y\,\mathbf{i}/(x^2 + y^2) + x\,\mathbf{j}/(x^2 + y^2)$ найти циркуляцию:

1) по окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $z = z_0$, ориентированной против часовой стрелки при взгляде из точек оси Oz, где $z > z_0$;

2) по окружности $(x - R)^2 + (y - 2R)^2 = R^2$, $z = z_0$, ориентация произвольна.

96. Найти циркуляцию поля $\mathbf{a} = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2) + z\mathbf{k}$ по окружности

$$\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\},$$

ориентированной против часовой стрелки при взгляде из точек оси Oz, где $z > 1$.

97. В условиях задачи 64 найти циркуляцию поля $\mathbf{v}$:

1) по окружности радиуса R, которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и ориентирована по направлению вращения;

2) по окружности радиуса R, которая ориентирована так же, как и в 1), но плоскость которой составляет угол α с осью вращения.

98. В условиях задачи 64 примем ось вращения за ось Oz, направив ее по вектору угловой скорости. Пусть G — ограниченная односвязная область в плоскости Oxy с границей γ — кусочно гладким простым замкнутым контуром, Ц — цилиндр с основанием $\overline{G}$ и образующими, параллельными оси вращения. Пусть Γ — замкнутая кусочно гладкая кривая на поверхности цилиндра Ц, которая взаимно однозначно проектируется на γ. Доказать, что циркуляция поля $\mathbf{v}$ по Γ равна $2\omega \cdot \mu G$, где μG — площадь G.

99. Магнитное поле прямого бесконечного проводника постоянного тока I $(I > 0)$ задается как поле вектора напряженности $\mathbf{H}$. Если ось Oz совместить с проводником по направлению тока, то

$$\mathbf{H} = 2I\,\frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

1) Убедиться, что $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}$ (в отличие от $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ из задачи 64).

2) Найти циркуляцию поля $\mathbf{H}$ по окружности радиуса R с центром на оси Oz:

а) лежащей в плоскости, перпендикулярной оси Oz;

б) лежащей в плоскости, которая составляет угол α с осью Oz.

3) Взяв такие же, как и в задаче 98, область G с границей γ, цилиндр Ц и кривую Γ на его поверхности и допустив, что ось Oz не является образующей цилиндра Ц, доказать, что циркуляция $\mathbf{H}$ по Γ равна циркуляции $\mathbf{H}$ по γ.

4) Допустив, что $O \in G$, и взяв окружность с центром O, лежащую в G, доказать, что циркуляции $\mathbf{H}$ по γ и по этой окружности равны.

5) Доказать, что если контур Γ (из 3)) не охватывает ось Oz, т. е. проводник с током, то циркуляция H по Γ равна нулю, а если Γ охватывает ось Oz, то циркуляция H по Γ такая же, как и по окружности из п. 2).

100. Найти с точностью до $o(\varepsilon^2)$абсолютную величину циркуляции поля $\mathbf{a}$ по окружности $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\varepsilon^2$, $\quad x+$ $+y+z=3$, если:

1) $\mathbf{a}=\dfrac{1}{y}\,\mathbf{i}+\dfrac{1}{z}\,\mathbf{j}+\dfrac{1}{x}\,\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a}=\dfrac{y}{\sqrt{z}}\,\mathbf{i}-\dfrac{x}{\sqrt{z}}\,\mathbf{j}+\sqrt{xy}\,\mathbf{k}$.

101. Доказать формулу: 1) (20); 2) (21); 3) (22).

102. Пусть u и $\mathbf{a}$ — непрерывно дифференцируемые поля в Ω, $M\in\Omega$. Рассмотрим совокупность содержащих M областей $G\subset\Omega$, для которых справедлива формула (23). Пусть $d(G)$ — диаметр, $\mu(G)$ — объем G. Доказать, что:

1) $\operatorname{grad} u(M) = \lim\limits_{d(G)\to 0}\dfrac{1}{\mu(G)}\displaystyle\iint\limits_{\partial G} u\mathbf{n}\,dS$;

2) $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \lim\limits_{d(G)\to 0}\dfrac{1}{\mu(G)}\displaystyle\iint\limits_{\partial G} [\mathbf{n},\mathbf{a}]\,dS$.

103. Какие из указанных полей потенциальны в R^3:

1) $\mathbf{a}=x^2\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$; 2) $\mathbf{a}=xz\,\mathbf{i}+zy\,\mathbf{j}+yx\,\mathbf{k}$;

3) $\mathbf{a}=(ax+y+bz)\,\mathbf{i}+(2x+cy+dz)\,\mathbf{j}+(bx+dy+cz)\,\mathbf{k}$;

4) $\mathbf{a}=yz\cos xy\,\mathbf{i}+xz\cos xy\,\mathbf{j}+\sin xy\,\mathbf{k}$?

104. Потенциально ли поле $\mathbf{H}=2I\,\dfrac{-y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}}{x^2+y^2}$, $\quad (x;y)\neq(0;0)$:

1) в полупространстве $x>0$;

2) во всем пространстве без оси Oz?

105. Проверить, что поле $\mathbf{H}=2I(-y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j})/(x^2+y^2)$ потенциально в полупространстве $y>0$, и найти его потенциал.

106. Проверить потенциальность и найти потенциал поля:

1) $\mathbf{a}=(y+z)\,\mathbf{i}+(z+x)\,\mathbf{j}+(x+y)\,\mathbf{k}$;

2) $\mathbf{a} = \dfrac{yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}}{1 + x^2y^2z^2}$; 3) $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}$;

4) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r$; 5) $\mathbf{a} = r\mathbf{r}$ $(\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|)$.

107. Пусть $f(r)$, $r > 0$, — дифференцируемая функция. Доказать, что поле (центральное) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ потенциально при $r > 0$ $(\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|)$. Найти потенциал $\mathbf{a}$.

108. Доказать, что потенциал u непрерывно дифференцируемого поля $\mathbf{a}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = \operatorname{div}\mathbf{a}$.

109. Доказать, что если поле $\mathbf{a}$ потенциально в звездной (см. задачу 30) относительно точки $M_0(r_0)$ области Ω, то его потенциал в точке $M(\mathbf{r})$ определяется формулой

$$u(\mathbf{r}) = \int\limits_0^1 (\mathbf{a}(\mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)),\, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,dt + \text{const}.$$

110. Доказать, что положения устойчивого равновесия частицы в потенциальном силовом поле $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} u$ находятся в точках минимума потенциала u.

111. Доказать, что потенциальное поле не имеет замкнутых векторных линий.

112. Является ли поле $\mathbf{a}$ потенциальным, соленоидальным, если $(\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|)$:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$; 2) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r$?

113. Является ли поле $\mathbf{a}$ соленоидальным, если:

1) $\mathbf{a} = x(z^2 - y^2)\,\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\,\mathbf{j} + z(y^2 + x^2)\,\mathbf{k}$;

2) $\mathbf{a} = (1 + 2xy)\,\mathbf{i} - y^2z\,\mathbf{j} + (z^2y - 2yz + 1)\,\mathbf{k}$;

3) $\mathbf{a} = x^2yz\,\mathbf{i} + zy^2z\,\mathbf{j} - xyz^2\,\mathbf{k}$; 4) $\mathbf{a} = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2) + xy\mathbf{k}$.

114. Доказать, что условие (34) необходимо и достаточно для соленоидальности поля.

115. Найти такую дифференцируемую функцию Φ, чтобы поле $\mathbf{a} = \Phi(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, было соленоидальным.

116. Поток поля $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$, $r = |\mathbf{r}|$, определенного в области $r > 0$, через сферу $r = 1$ равен 4π. Означает ли это, что данное поле несоленоидально при том определении соленоидальности, которое принято в этом параграфе?

117. 1) Пусть $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — векторные потенциалы поля $\mathbf{a}$; доказать, что поле $\mathbf{b} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$ безвихревое;

2) пусть $\mathbf{A}$ — векторный потенциал поля $\mathbf{a}$, поле $\mathbf{b}$ безвихревое; доказать, что $\mathbf{A} + \mathbf{b}$ — также векторный потенциал поля $\mathbf{a}$.

118. Проверить соленоидальность поля $\mathbf{a}$ и найти его векторный потенциал, если:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор; 2) $\mathbf{a} = 2yx\,\mathbf{k}$;

3) $\mathbf{a} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$; 4) $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$;

5) $\mathbf{a} = 3y^2\,\mathbf{i} - 3x^2\,\mathbf{j} - (y^2 + 2x)\,\mathbf{k}$; 6) $\mathbf{a} = ye^z\,\mathbf{i} + ze^x\,\mathbf{j} + xe^y\,\mathbf{k}$.

119. Доказать, что если векторное поле $\mathbf{a}$ непрерывно дифференцируемо и соленоидально в области G, звездной (см. задачу 30) относительно точки $M_0(\mathbf{r}_0) \in G$, то

$$\mathbf{A}(M) = \int\limits_0^1 [\mathbf{a}(\mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)), \mathbf{r}]\, t\, dt$$

— один из его векторных потенциалов ($\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиус-векторы точек M_0 и M).

120. Найти векторный потенциал магнитного поля бесконечного прямого проводника постоянного тока I (ось Oz направить по проводнику, см. задачу 99).

121. Электрический заряд q, движущийся с постоянной скоростью $\mathbf{v}$, создает в пространстве (вакууме) в фиксированный момент времени магнитное поле напряженности

$$\mathbf{H}(M) = \frac{[q\mathbf{v}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3},$$

где $\mathbf{r}$ — вектор с началом в заряде, а концом в M, $r = |\mathbf{r}|$. Найти векторный потенциал этого поля.

122. Доказать, что векторные линии соленоидального поля либо замкнуты, либо оканчиваются на границе области определения поля.

123. Доказать, что поток соленоидального поля через поперечное сечение его векторной трубки одинаков вдоль всей трубки.

124. Пусть u — дважды непрерывно дифференцируемое поле в Ω, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — дифференцируемые поля в Ω, $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \operatorname{grad} u$. Доказать, что для того, чтобы поле $\mathbf{b}$ было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы поле u удовлетворяло уравнению $\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}$.

125. Доказать гармоничность плоского поля

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^2, \quad \mathbf{r} = (x; y), \quad r = |\mathbf{r}|.$$

126. Доказать гармоничность поля сил тяготения точечной массы и поля кулоновых сил точечного заряда.

127. Доказать, что потенциал гармонического поля есть функция гармоническая, т. е. $\Delta u = 0$.

128. Пусть ограниченная область G имеет кусочно гладкую границу ∂G, функция u, определенная в $\overline{G}$, гармонична в G, а $\operatorname{grad} u$ непрерывен в $\overline{G}$. Доказать, что:

1) $\displaystyle\iint\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS = 0$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к ∂G;

2) если $u = 0$ на ∂G, то $u = 0$ в $\overline{G}$, т. е. гармоническая функция однозначно определяется своими значениями на границе;

3) если $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ на ∂G, то $u = \mathrm{const}$ в $\overline{G}$, т. е. гармоническая функция определяется с точностью до постоянной значениями своей нормальной производной на границе.

129. В условиях задачи 128 пусть $x \in G$, $\Omega_\varepsilon(x)$ — шар с центром x и радиусом ε, лежащий в G. Взяв

$$v = \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad y \in \overline{G}, \quad y \neq x,$$

и применив формулу Грина (28) к области $G \setminus \Omega_\varepsilon(x)$, доказать, что

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\partial G} \Big(u(y)\nabla_y \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \nabla u(y), \mathbf{n}(y)\Big)\, dS_y,$$

где нижний символ y указывает переменную точку, $\mathbf{n}(y)$ — единичная внешняя нормаль к границе в точке y.

130. Пусть функция u гармонична в окрестности точки $x \in R^3$, $S_R(x)$ и $\Omega_R(x)$ — сфера и шар радиуса R с центром x, лежащие в этой окрестности. Доказать теоремы о среднем для гармонических функций:

1) $u(x) = \dfrac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S_R(x)} u(y)\, dS$; 2) $u(x) = \dfrac{3}{4\pi R^3} \iiint\limits_{\Omega_R(x)} u(y)\, dV$.

131. Из уравнений электростатики

$$(\nabla, \mathbf{E}) = \rho/\varepsilon_0, \quad [\nabla, \mathbf{E}] = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{E}$ — поле электрической напряженности, ρ — плотность распределения зарядов, $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$, вывести *закон Гаусса*

$$\iint\limits_{\partial G} (\mathbf{n}, \mathbf{E})\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

о пропорциональности потока напряженности через границу области G (с внешней нормалью $\mathbf{n}$) и полного заряда Q, находящегося в этой области.

132. Пусть поле скоростей $\mathbf{v}$ движущейся сплошной среды потенциально. Доказать, что если среда несжимаема, то потенциал u поля $\mathbf{v}$ гармоничен (можно воспользоваться тем, что объемный расход среды через любую замкнутую поверхность равен нулю).

ОТВЕТЫ

1. а) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$; б) $x^2 - y^2 + z^2 = -2$.

2. $x - 2 = y - 2 = (z+2)/2$.

3. 1) Объединение двух плоскостей $(\mathbf{a} - C\mathbf{b}, \mathbf{r}) = 0$, $(\mathbf{b}, \mathbf{r}) \neq 0$, $C = \mathrm{const}$;

2) плоскость $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}) = \mathrm{const}$.

4. $\{u=2\}$ — отрезок $y=z=0$, $-1\leqslant x\leqslant 1$; $\{u=\text{const}>2\}$ — эллипсоиды $(4x^2)/(u^2)+4(y^2+z^2)/(u^2-4)=1$; $\max u=2\sqrt{1+R^2}$.

5. Однополостные конусы с вершиной $(0;0;0)$ и осью Oz; $\max u = \cos(\pi/12)=(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$, $\min u=\sin(\pi/12)=(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$.

6. 1) $(2;2;2)$; 2) $(2/3;2/3;-2/3)$; 3) $(4;1;1)$; 4) $(0;0;1)$.

7. а) $xy=18z^2$; б) $x=2y^2$; $z=1/(3y)$, $y\neq 0$, $y\neq 1$; в) $(2;1;1/3)$.

8. 1) 0; 2) $\arccos(-1/3)$; 3) $\arccos(-8/9)$; 4) $\pi/2$.

9. 1/9. **10.** $\inf|\operatorname{grad}u|=0$, $\sup|\operatorname{grad}u|=1/2$.

15. 1) $\mathbf{r}/r$; 2) $2\mathbf{r}$; 3) $-\mathbf{r}/r^3$; 4) $\mathbf{r}/r^2$; 5) $\mathbf{a}$; 6) $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$;
7) $\mathbf{a}(\mathbf{b},\mathbf{r})+\mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{r})$; 8) $2[\mathbf{a},[\mathbf{r},\mathbf{a}]]$.

17. $\varepsilon/|\operatorname{grad}u(M_0)|$.

21. 1) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\,\mathbf{e}_r+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{e}_z$;
2) $\dfrac{\partial u}{\partial r}\,\mathbf{e}_r+\dfrac{1}{r\cos\psi}\,\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\,\mathbf{e}_\varphi+\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial\psi}\,\mathbf{e}_\psi$.

24. 1) $\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})=(\mathbf{r},\mathbf{n})/r$; 2) $-(\mathbf{r},\mathbf{n})/r^3$; 3) $(\mathbf{n},\mathbf{a})$; 4) $f'(r)(\mathbf{n},\mathbf{r})/r$.

25. $2u/r$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

26. $(\operatorname{grad}u,\operatorname{grad}v)/|\operatorname{grad}v|$.

27. а) $z=0$; $y=x^2$, $x\in(0;1]$; б) $z=1/x$, $y=x^2$, $x\in(0;1]$.

28. 1) $xy=C$; 2) $x^2-y^2=C$; 3) $y=Cx^2$ и $x=0$, $x^2+y^2\neq 0$;
4) $2x^2+y^2=C$, $x\neq 0$.

29. 1) $(as;bs^2;cs)$, $s>0$; 2) $(as;bs;c/s)$, $s>0$;
3) $x^2-y^2=C_1$, $x^2-z^2=C_2$.

31. 1) $x=as$, $y=b$, $z=cs$, $s>0$; 2) $x=a$, $y^2+z^2=b^2$;
3) $x=as^2$, $y=bs$, $z=c$, $s>0$; 4) $x=as$, $y=b/s$, $z=c$, $s>0$;
5) $1/x-1/y=C_1$, $z=C_2$.

32. 1) $\mathbf{r}=s\mathbf{r}_0$, $s>0$; 2) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t$, $\mathbf{a}=(a_1;a_2;a_3)$;
3) $\mathbf{r}=s\mathbf{r}_0$, $s>0$; 4) $\mathbf{r}^2=\text{const}$, $(\mathbf{c},\mathbf{r})=\text{const}$; 5) $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{c}t$;
6) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=C$;
7) $x=as$, $y=bs^2$, $z=cs$, $s>0$.

33. 1) $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=ct$;
2) $1/x-1/z=1$, $1/x+1/(2y^2)=4$; 3) $y=x$, $z^2=2(x^2-1)$.

34. $x^2+y^2=R^2$, $z=C$ (ось Oz совпадает с проводником, а по направлению — с током).

35. $x^2+y^2=4z^2$.

36. Четверть тора $8(y^2+z^2)=(x^2+y^2+z^2+1)^2$.

38. 1) 3; 2) $4r$; 3) $2/r$; 4) $2x^2/(x^2+y^2)^{3/2}$; 5) $12xy^2+4x^3-6xz$.

39. $\Delta u\equiv\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}$.

40. 1) $(\operatorname{grad}u)^2+u\operatorname{div}\operatorname{grad}u\equiv(\nabla u)^2+u\Delta u$;